Математика

X класс. Решения.

<u>Решения учащихся могут отличаться от авторских!</u>

1. ***Решение:***

2019 = 1000 + 500 + 200 + 300 +19. Произведение чисел 1000, 500, 200, 300 делится на 10 000 000 000.

2. ***Решение:***

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число n имеет следующее разложение на простые множител $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *– различные простые делители числа n. Тогда количестве делителей числа n (обозначается d(n)) выражается формулой* $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. *Например* $24 = 2^3 \cdot 3^1$, *тогда* $d(24) = (3+1)(1+1) = 8$. *Действительно, число 24 имеет 8 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8 12, 24.*

Пусть n – натуральное число, имеющее 48 делителей (из которых не более трех простых) и при этом кратное 2020. Заметим, что $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Тогда требуемое число n имеет ровно три простых делител (2, 5 и 101) и разложение числа n на простые множители имеет вид: $2020 = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$, где $a \geq 2$.

Итак, имеем: $(a+1)(b+1)(c+1) = 48$, где $a+1 \geq 3$. Заметим что $(b+1)(c+1) \geq 2 \cdot 2 = 4$, тогд $a+1 \leq 12$. С учетом этих требований рассмотрим различные способы представления числа 48 в вид произведения трех множителей (считаем, что порядок множителей имеет значение). Эти способь сгруппируем по возрастанию значений множителя a+1: 3, 4, 6, 8, 12.

1) $48 = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 2 \cdot 8 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 8 \cdot 2$ – 3 способа;

2) $48 = 4 \cdot 12 = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 6 \cdot 2$ – 4 способа;

3) $48 = 6 \cdot 8 = 4 \cdot 2 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 2$ – 2 способа;

4) $48 = 8 \cdot 6 = 8 \cdot 2 \cdot 3 = 8 \cdot 3 \cdot 2$ – 2 способа;

5) $48 = 12 \cdot 4 = 12 \cdot 2 \cdot 2$ – 1 способ.

Всего получаем 3+4+2+2+1=12 способов. Соответственно получаем 12 чисел, удовлетворяющи условию задачи.

Ответ*: *12 чисел.

3. ***Решение:***

В уравнение $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2y(x+1)$ подставим x=y=0.

Получаем $f(0-0) = f(0) + f(0) - 2 \cdot 0 \cdot (0+1)$, откуда $f(0) = 0$.

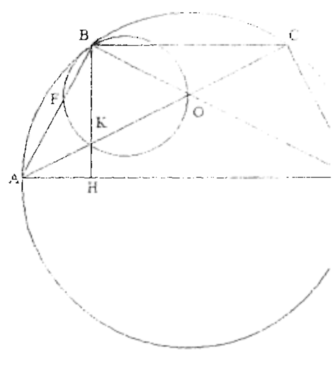
Далее, в уравнение $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2y(x+1)$ подставим x вместо y:

$f(x-x) = f(x) + f(x) - 2x(x+1)$;

$f(0) = f(x) + f(x) - 2x(x+1)$. С учетом того, что $f(0) = 0$, имеем $f(x) = x^2 + x$. Провер показывает, что данная функция удовлетворяет исходному уравнению.

***Ответ*:** $f(x) = x^2 + x$.

4. ***Решение:***



Так как трапеция ABCD вписана в окружность, то AB=CD. Пусть R – радиус окружности. Тогда $BC = R$, $AD = 2R$. Пусть точка P – середина AD и центр описанной окружности. Тогда PB=PC=BC=R и высота BH трапеции равна высоте равностороннего треугольника PBC со стороной R. $BH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Далее $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{R}{2}$, $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = R$.

Итак, в трапеции ABCD $AD = 2R$, $AB = BC = CD = R$.

Так как $AH = \frac{1}{2}AB$, то ∠ABH=30°, ∠BAH=60°, ∠ABC=120°, ∠BAC=∠BCA=30°. Далее. ∠OAD=∠ODA=60°–30°=30°. Тогда (из треугольника AOD) ∠AOD=120° и ∠AOB=180°–120°=60°. Вписанный ∠ABD=90°, (опирается на диаметр AD), тогда ∠KBO=∠ABD–∠ABH=90°–30°=60°. В треугольнике KOB имеются два угла по 60° (∠KOB и ∠KBO), следовательно, данный треугольник – равносторонний

В равнобедренном треугольнике BOC ∠BOC=120°, поэтому $BO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$. $KO = BO = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

В равнобедренном треугольнике AOD ∠AOD=120°, поэтому $AO = \frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$AK = AO - KO = \frac{2R}{\sqrt{3}} - \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$. По свойству секущих, имеем $AF \cdot AB = AK \cdot AO$, $AF \cdot R = \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}}$, $AF = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}AB$, откуда легко получаем, что AF:FB=2:1.

Ответ: AF:FB=2:1.

5. ***Доказательство:***

Разобьем стороны треугольника на 5 равных отрезков длиной 5 см. Через точки разбиения проведем прямые, параллельны сторонам треугольника. В итоге исходный треугольник окажется разбитым на 25 треугольников со стор. 5см. Заметим, что в каком-либо треугольнике окажется не менее 5 муравьев. В противном случае, общее количество муравьев в исходном треугольнике муравьев на поле будет не более, чем $4 \times 25 = 100$ муравьев. Опишем около этого треугольника со стороной 5 см круг. Радиус этого круга будем равен $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. $\frac{5\sqrt{3}}{3} < 3$ (в чем легко убедиться, возведя обе части неравенства в квадрат). Очевидно, что указанные 5 муравьев будут находиться внутри такого круга или на его окружности (в случае, если муравей находится в вершине маленького треугольника). Поскольку $\frac{5\sqrt{3}}{3} < 3$ (в чем можно убедиться, возведя обе части неравенства в квадрат), то увеличив радиус данного круга с $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ до 3 см, получим, что данные 5 муравьев будут находиться внутри круга радиуса 3 см.

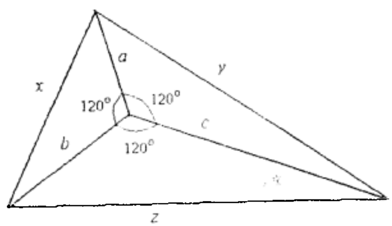
Что и требовалось доказать.

6. ***Доказательство:***

Перепишем неравенство в виде: $\sqrt{a^2+b^2-2ab\left(-\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{a^2+c^2-2ac\left(-\frac{1}{2}\right)} > \sqrt{b^2+c^2-2bc\left(-\frac{1}{2}\right)}$ и далее $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120^\circ} + \sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos 120^\circ} > \sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos 120^\circ}$.

Введем обозначения: $x = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120^\circ}$, $y = \sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos 120^\circ}$, $z = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos 120^\circ}$.

Исходное неравенство имеет следующую геометрическую интерпретацию:



Согласно неравенству треугольника $x + y > z$.

Что и требовалось доказать.

Математика

IX класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. Решение:

Например, число 735 имеет простые делители 7, 3 и 5, и других простых делителей у него нет.

Ответ: 735.

2. Решение:

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число n имеет следующее разложение на простые множители $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *– различные простые делители числа n. Тогда количество делителей числа n (обозначается d(n)) выражается формулой* $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. *Например,* $24 = 2^3 \cdot 3^1$, *тогда* $d(24) = (3+1)(1+1) = 8$. *Действительно, число 24 имеет 8 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.*

Пусть n – натуральное число, имеющее 24 делителя (из которых не более трех простых) и при этом кратное 2020. Заметим, что $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Тогда требуемое число n имеет ровно три простых делителя (2, 5 и 101) и разложение числа n на простые множители имеет вид: $2020 = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$, где $a \geq 2$.

Итак, имеем: $(a+1)(b+1)(c+1) = 24$, где $a+1 \geq 3$. Заметим что $(b+1)(c+1) \geq 2 \cdot 2 = 4$, тогда $a+1 \leq 6$. С учетом этих требований рассмотрим различные способы представления числа 24 в виде произведения трех множителей (считаем, что порядок множителей имеет значение). Эти способы сгруппируем по возрастанию значений множителя a+1: 3, 4, 6.

1) $24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 2$ – 2 способа;

2) $24 = 4 \cdot 6 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$ – 2 способа;

3) $24 = 6 \cdot 4 = 6 \cdot 2 \cdot 2$ – 1 способ.

Всего получаем 2+2+1=5 способов. Соответственно получаем 5 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 5 чисел.

3. Решение:

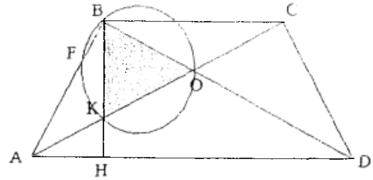
Запишем уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Подставим в это уравнение координаты точки A: $0 = 2019k + b$, откуда $b = -2019k$. Уравнение прямой примет вид $y = kx - 2019k$. Абсциссы точек пересечения данной прямой с графиком функции $y = x^2$ будут являться корнями уравнения: $x^2 = kx - 2019k$ или $x^2 - kx + 2019k = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1 x_2 = 2019k$.

Имеем: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \dfrac{k}{2019k} = \dfrac{1}{2019}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2019}$.

4. Решение:

Пусть $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. BH – высота, проведенная из вершины B. Тогда $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{a}{2}$.



Так как $AH = \dfrac{1}{2}AB$, то ∠ABH=30°, ∠BAH=60°, ∠ABC=120°, ∠BAC=∠BCA=30°.

Далее, $\angle OAD=\angle ODA=60°-30°=30°$. Тогда (из треугольника AOD) $\angle AOD=120°$ и $\angle AOB=180°-120°=60°$. В треугольнике BHD: $\angle HBD=90°-\angle ODA=60°$. В треугольнике KOB имеются два угла по 60° ($\angle KOB$ и $\angle KBO$), следовательно, данный треугольник – равносторонний, т.е. BO=KO.

Из равнобедренного треугольника BOC с углом BOC равным 120°, несложно получить, что $BO=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Аналогично, из равнобедренного треугольника AOD с углом AOD равным 120°, несложно получить, что $AO=\frac{AD}{\sqrt{3}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Далее, KO=BO=$\frac{a}{\sqrt{3}}$. AK=AO–KO=$\frac{2a}{\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

По свойству секущих, имеем $AF\cdot AB=AK\cdot AO$, $AF\cdot a=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $AF=\frac{2}{3}a=\frac{2}{3}AB$, откуда легко получаем, что AF:FB=2:1.

Ответ*: *AF:FB=2:1.

5. Доказательство:

Разобьем каждую сторону квадрата на 4 равных отрезка. Через точки разбиения проведем прямые, параллельные сторонам исходного квадрата. В итоге исходный квадрат окажется разбитым на 16 квадратиков, со сторонами в 4 раза меньшими сторон исходного квадрата. Заметим, что хотя бы в одном из квадратиков окажется не менее 10 муравьев (границы квадратика считаем «территорией» данного квадратика). В противном случае, общее количество муравьев в исходном квадрате будет не более, чем $16\times 9=144$.

Наибольшее из расстояний между муравьями в таком квадратике не превысит диагонали этого квадратика, а это и есть $\frac{1}{4}$ диагонали исходного квадрата.

Что и требовалось доказать.

6. Решение:

1-й способ. Подставим выражение для c^2 в первые два равенства. $a^2+ab=56$, $b^2+ba=42$.

$a(a+b)=56$, $b(b+a)=42$. (1) Разделим соответственно правые и левые части равенств (1):

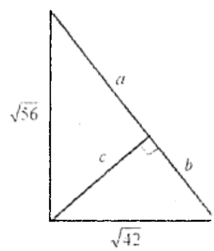
$\frac{a(a+b)}{b(b+a)}=\frac{56}{42}$, $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$, $a=4k, b=3k, k>0$, тогда $c^2=ab=4k\cdot 3k=12k^2$. $(4k)^2+12k^2=56$, откуда $k=\sqrt{2}$.

Тогда, $a=4\sqrt{2}, b=3\sqrt{2}, c=2\sqrt{6}$. Получаем $ac+bc=4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}+3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}=28\sqrt{3}$.

Ответ: $28\sqrt{3}$.

2-й способ.

Дадим следующую геометрическую интерпретацию равенств из условия задачи. Величину c примем высотой прямоугольного треугольника, величины a и b – проекции катетов на гипотенузу. Тогда равенства из условия задачи могут иметь следующую геометрическую интерпретацию (см. рисунок). Тогда выражение $ac+bc=(a+b)c$ выражает удвоенную площадь прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{56}$ и $\sqrt{42}$, а значит равно произведению катетов, т.е. $\sqrt{56}\cdot\sqrt{42}=28\sqrt{3}$.



Ответ: $28\sqrt{3}$.