Математика **VIII класс. Решения.**

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. ***Доказательство:***

Например, если выбраны все нечетные числа и число 4, то среди них нельзя найти два числа, одно из которых в два раза больше второго.

Что и требовалось доказать.

2. ***Доказательство:***

Как известно, натуральное число имеет нечетное количество делителей тогда и только тогда, когда является точным квадратом. Пусть на доске были записаны числа a и b. Если никто из мальчиков не ошибся, то числа a, b и ab имеют соответственно 99, 100 и 2019 делителей. Получаем, что числа a и ab являются точными квадратами, а число b – не является. Но при умножении точного квадрата на число, не являющееся точным квадратом, не может получиться точный квадрат. Противоречие. Следовательно, хотя бы один из мальчиков ошибся.

Что и требовалось доказать.

3. ***Решение:***

Пусть прямая пересекает оси OX и OY соответственно в точках A (a; 0) и B (0; b). Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}AO \cdot OB$. Запишем уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Из условия следует, что $k > 0$. Подставим в это уравнение координаты точки М: $2 = -2k + b$. откуда $b = 2 + 2k$.

Уравнение прямой примет вид $y = kx + 2 + 2k$. Подставим в это уравнение координаты точек A и B.

$0 = ka + 2 + 2k$, откуда $a = -\frac{2k+2}{k} = -2 - \frac{2}{k}$.

$b = k \cdot 0 + 2 + 2k = 2 + 2k$.

В треугольнике AOB катет $AO = |a| = 2 + \frac{2}{k}$, катет $BO = |b| = 2 + 2k$.

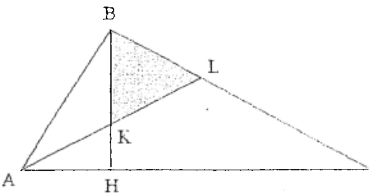
Получаем

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot BO = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{k}\right)\cdot(2 + 2k) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\cdot(2 + 2k) = 2 + 2k + \frac{2}{k} + 2 = 4 + 2\cdot\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Согласно известному неравенству Коши: $k + \frac{1}{k} \geq 2$ для положительных k. Поэтому $S_{\Delta AOB} = 4 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right) \geq 4 + 2\cdot 2 = 8$. Минимальное значение площади треугольника AOB равно 8.

Ответ: **8 кв. ед.**

4. ***Доказательство:***



Так как AC=2AB, то ∠BCA=30°. Тогда ∠BAC=60°. Так как AL – биссектриса угла A, то ∠KAH=30°. Тогда ∠AKH=60°.

∠BKL=∠AKH=60°. В треугольнике ALC углы LAC и LCA равны по 30°. Тогда ∠ALC=180°–30°–30°=120°, и ∠BLK=180°–120°=60°.

В треугольнике BKL углы BLK и BKL равны по 60°. Следовательно, данный треугольник равносторонний.

Что и требовалось доказать.

5. ***Доказательство:***

Соединим отрезками середины противоположных сторон. В итоге исходный квадрат окажется разбитым на 4 квадратика, со сторонами в 2 раза меньшими сторон исходного квадрата. Заметим, что хотя бы в одном из квадратиков окажется не менее 5 муравьев (границы квадратика считаем «территорией» данного квадратика). В противном случае, общее количество муравьев в исходном квадрате будет не более, чем $4 \times 4 = 16$.

Наибольшее из расстояний между муравьями в таком квадратике не превысит диагонали этого квадратика, а это и есть половина диагонали исходного квадрата.

Что и требовалось доказать.

6. ***Решение:***

Перепишем данные равенства в виде $a + b = 5 - ab$, $a^2 + b^2 = 15 - a^2b^2$. Тогда $(a + b)^2 = (5 - ab)^2$. $a^2 + 2ab + b^2 = 25 - 10ab + a^2b^2$, $15 - a^2b^2 + 2ab = 25 - 10ab + a^2b^2$.

Тогда имеем: $2a^2b^2 - 12ab + 10 = 0$; $a^2b^2 - 6ab + 5 = 0$; $a^2b^2 - ab - 5ab + 5 = 0$; $ab(ab - 1) - 5(ab - 1) = 0$; $(ab - 1)(ab - 5) = 0$. Откуда ab=1 или ab=5.

Заметим, что если ab=5, то $a^2b^2 = 25$ и из второго равенства условия следует, что $a^2 + b^2 = -10$, что невозможно. Итак, ab=1.

Ответ: 1.

Математика XI класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. Решение:

Из данного квадрата можно вырезать 8 попарно различных прямоугольников и квадратов следующим образом:

1	1	1	1	1	1
5	5	2	2	2	2
5	5	3	3	3	4
5	5	6	6	7	7
5	5	6	6	8	8
5	5	6	6	8	8

Проведем оценку количества фигур, исходя из того, что фигуры должны быть попарно различными: 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 1×5, 1×6, 2×3. Всего 8 фигур, которые занимают 31 клетку. Больше фигур, удовлетворяющих условиям задачи, вырезать невозможно. На рисунке показано, как вырезать прямоугольники и квадраты 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 2×5, 1×6, 2×3.

2. Решение:

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число n имеет следующее разложение на простые множители $n = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}$, где p_1, p_2, ..., p_k – различные простые делители числа n. Тогда количество делителей числа n (обозначается d(n)) выражается формулой $d(n)=(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. Например, $24=2^3\cdot3^1$, тогда $d(24)=(3+1)(1+1)=8$. Действительно, число 24 имеет 8 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Пусть n – натуральное число, имеющее 72 делителя (из которых не более трех простых) и при этом кратное 2020. Заметим, что $2020=2^2\cdot5\cdot101$. Тогда требуемое число n имеет ровно три простых делителя (2, 5 и 101) и разложение числа n на простые множители имеет вид: $2020=2^a\cdot5^b\cdot101^c$, где $a\ge2$.

Итак, имеем: $(a+1)(b+1)(c+1)=72$, где $a+1\ge3$. Заметим что $(b+1)(c+1)\ge2\cdot2=4$, тогда $a+1\le18$. С учетом этих требований рассмотрим различные способы представления числа 72 в виде произведения трех множителей (считаем, что порядок множителей имеет значение). Эти способы сгруппируем по возрастанию значений множителя a+1: 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18.

1) $72=3\cdot24=3\cdot2\cdot12=3\cdot3\cdot8=3\cdot4\cdot6=3\cdot6\cdot4=3\cdot8\cdot3=3\cdot12\cdot2$ – получаем 6 способов;

2) $72=4\cdot18=4\cdot2\cdot9=4\cdot3\cdot6=4\cdot6\cdot3=4\cdot9\cdot2$ – 4 способа;

3) $72=6\cdot12=6\cdot2\cdot6=6\cdot3\cdot4=6\cdot4\cdot3=6\cdot6\cdot2$ – 4 способа;

4) $72=8\cdot9=6\cdot3\cdot3$ – 1 способ;

5) $72=9\cdot8=9\cdot2\cdot4=9\cdot4\cdot2$ – 2 способа;

6) $72=12\cdot6=12\cdot2\cdot3=12\cdot3\cdot2$ – 2 способа;

7) $72=18\cdot4=18\cdot2\cdot2$ – 1 способ.

Всего получаем 6+4+4+1+2+2+1=20 способов. Соответственно получаем 20 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

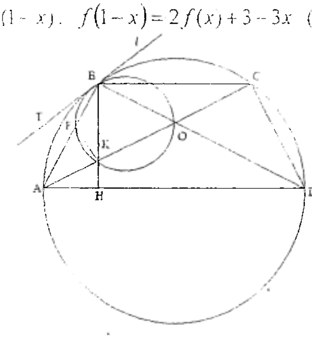
***Ответ*: 20 чисел.**

3. Решение

В уравнение $f(y+f(x))=f(x)+2f(1-x)+y+2x$ подставим вместо y выражение $x-f(x)$. Получаем $f(x-f(x)+f(x))=f(x)+2f(1-x)+x-f(x)+2x$ (1). $f(x)=2f(1-x)+3x$ (2). Далее в уравнение (2) вместо x подставим 1–x: $f(1-x)=2f(1-(1-x))+3(1-x)$. $f(1-x)=2f(x)+3-3x$ (3). Подставим выражение для $f(1-x)$ из (3) в уравнение (2): $f(x)=2(2f(x)+3-3x)+3x$; $f(x)=4f(x)+6-6x+3x$; $f(x)=x-2$. Проверка показывает, что данная функция удовлетворяет исходному уравнению.

***Ответ*: $f(x)=x-2$.**

4. Доказательство:



Так как трапеция ABCD вписана в окружность, то AB=CD. Пусть R – радиус окружности. Тогда $BC=R$, $AD=2R$. Пусть точка P – середина AD и центр описанной окружности. Тогда $PB=PC=BC=R$ и высота BH трапеции равна высоте равностороннего треугольника PBC со стороной R. $BH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Далее $AH=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{R}{2}$, $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=R$.

Итак, в трапеции ABCD $AD=2R$, $AB=BC=CD=R$. Так как $AH=\dfrac{1}{2}AB$, то ∠ABH=30°, ∠BAH=60°, ∠ABC=120°, ∠BAC=∠BCA=30°. Далее, ∠OAD=∠ODA=60°–30°=30°.

Тогда (из треугольника AOD) ∠AOD=120° и ∠AOB=180°–120°=60°.

Для того, чтобы доказать, что окружность, описанная около трапеции ABCD, и окружность, описанная около треугольника BOK, касаются внутренним образом в точке B, докажем, что касательные, проведенные к этим окружностям в точке B, совпадают. Пусть окружность, описанная около треугольника BOK, пересекает отрезок AB второй раз (кроме точки B) в точке F. Пусть TB касательная к окружности, описанной около трапеции ABCD. Тогда ∠TBA=∠TBF=∠BDA=30°.

Четырехугольник FBOK вписанный и ∠KOB=60°, тогда ∠BFK=180°–∠KOB=120°. Далее из треугольника FBK имеем: ∠BKF=180°–∠FBH–∠BFK=180°–30°–120°=30°.

Так как ∠BKF=∠TBF=30°, то прямая TB является также касательной к окружности, описанной около треугольника BOK, откуда и следует утверждение задачи.

Что и требовалось доказать.

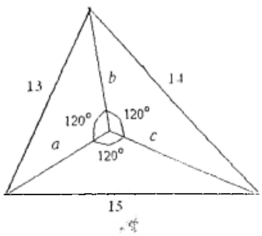
5. *Доказательство:*

Плоскостями, параллельными граням куба, разобьем куб на 27 одинаковых кубиков с ребром 8 (каждое ребро при это будет разбито на 3 равные части). Тогда найдется хотя бы один кубик, в который попадут не менее 5 комаров (стенки и вершины кубика будем считать частью кубика). В противном случае общее число комаров будет не более $27\cdot 4=108$. Рассмотрим шар, на поверхности которого лежат все вершины этого кубика. Легко видеть, центр этого шара будет находиться в точке пересечения диагоналей кубика и его радиус будет равен половине диагонали кубика с ребром 8, т.е. $\dfrac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. Очевидно, что выделенные 5 комаров будут находиться внутри такого шара или на его поверхности (в случае, если комар находится в вершине кубика). Поскольку $4\sqrt{3}<7$ (в чем можно убедиться, возведя обе части неравенства в квадрат), то увеличив радиус данного шара с $4\sqrt{3}$ см до 7 см, получим, что данные 5 комаров будут находиться внутри шара радиуса 7 см.

Что и требовалось доказать.

6. *Решение*

Перепишем равенства из условия в виде: $a^2+b^2-2ab\left(-\dfrac{1}{2}\right)=13^2$, $b^2+c^2-2bc\left(-\dfrac{1}{2}\right)=14^2$, $a^2+c^2-2ac\left(-\dfrac{1}{2}\right)=15^2$ или $a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120^\circ=13^2$, $b^2+c^2-2bc\cdot\cos 120^\circ=14^2$, $a^2+c^2-2ac\cdot\cos 120^\circ=15^2$. Последние три равенства имеют следующую геометрическую интерпретацию (см. рисунок).



Площадь большого треугольника равна сумме площадей трех меньших треугольников: $\dfrac{1}{2}ab\sin 120^\circ+\dfrac{1}{2}bc\sin 120^\circ+\dfrac{1}{2}ac\sin 120^\circ=$ $\dfrac{1}{2}\sin 120^\circ(ab+bc+ac)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}(ab+bc+ac)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ac)$. С другой стороны, как несложно подсчитать (например, с помощью формулы Герона), площадь треугольника со сторонами 13, 14, 15 равна 84. Таким образом, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ac)$=84.

Ответ: 84.