

Задания для проведения дистанционной олимпиады по учебному предмету “Математика”

10 класс

1. Картофельное поле имеет форму прямоугольника и размеры 10×67 м. По полю ползают 2011 колорадских жуков так, что никакие три из них никогда не оказываются на одной прямой. Доказать, что в любой момент времени найдутся 4 таких жука, что площадь четырехугольника с вершинами в точках, где находятся эти жуки, не превысит 1 м^2 ? Считать, что жуки ползают только по поверхности поля.

2. Три окружности с центрами O_1, O_2, O_3 попарно касаются друг друга. В треугольник $O_1O_2O_3$ вписана окружность ω . К окружности ω проведены три касательные. Первая касательная проходит параллельно отрезку O_2O_3 и пересекает отрезки O_1O_2 и O_1O_3 в точках A_1 и B_1 соответственно. Вторая касательная проходит параллельно отрезку O_1O_3 и пересекает отрезки O_1O_2 и O_2O_3 в точках A_2 и B_2 соответственно. Третья касательная проходит параллельно отрезку O_1O_2 и пересекает отрезки O_1O_3 и O_2O_3 в точках A_3 и B_3 соответственно. Найти радиусы окружностей, если периметры треугольников $A_1O_1B_1, A_2O_2B_2, A_3O_3B_3$ равны 12, 14, 16 соответственно.

3. Дана функция $f(x)$, определенная на всей числовой прямой, кроме нуля, такая, что для любого x из области определения выполняется равенство:

$$f(x) - 2f\left(\frac{2011}{x}\right) + 2x = \frac{2011}{x}. \quad \text{Чему равно } f(2011)?$$

4. Словами *РЕСПУБЛИКА* и *БЕЛАРУСЬ* зашифрованы некоторые два натуральных числа, при этом каждая буква обозначает некоторую цифру. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а любые две разные буквы, среди которых нет мягкого знака, обозначают разные цифры. Какую цифру может обозначать мягкий знак, если сумма цифр числа *БЕЛАРУСЬ* равна 26, а число *ПИК* кратно 11?

5. Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = \sqrt{441 + x^2 - 42x \cdot \cos \alpha} + \sqrt{400 + x^2 - 40x \cdot \cos \beta},$$

где α и β – острые углы, такие, что $\alpha + \beta = 90^\circ$.