

# Задания для проведения дистанционной олимпиады по учебному предмету “Математика”

## 10 Класс

1. Картофельное поле имеет форму прямоугольника и размеры  $10 \times 67$  м. По полю ползают 2011 колорадских жуков так, что никакие три из них никогда не оказываются на одной прямой. Доказать, что в любой момент времени найдутся 4 таких жука, что площадь четырехугольника с вершинами в точках, где находятся эти жуки, не превысит  $1 \text{ м}^2$ ? Считать, что жуки ползают только по поверхности поля.

2. Три окружности с центрами  $O_1, O_2, O_3$  попарно касаются друг друга. В треугольник  $O_1O_2O_3$  вписана окружность  $\omega$ . К окружности  $\omega$  проведены три касательные. Первая касательная проходит параллельно отрезку  $O_2O_3$  и пересекает отрезки  $O_1O_2$  и  $O_1O_3$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Вторая касательная проходит параллельно отрезку  $O_1O_3$  и пересекает отрезки  $O_1O_2$  и  $O_2O_3$  в точках  $A_2$  и  $B_2$  соответственно. Третья касательная проходит параллельно отрезку  $O_1O_2$  и пересекает отрезки  $O_1O_3$  и  $O_2O_3$  в точках  $A_3$  и  $B_3$  соответственно. Найти радиусы окружностей, если периметры треугольников  $A_1O_1B_1, A_2O_2B_2, A_3O_3B_3$  равны 12, 14, 16 соответственно.

3. Дана функция  $f(x)$ , определенная на всей числовой прямой, кроме нуля, такая, что для любого  $x$  из области определения выполняется равенство:

$$f(x) - 2f\left(\frac{2011}{x}\right) + 2x = \frac{2011}{x}. \quad \text{Чему равно } f(2011)?$$

4. Словами *РЕСПУБЛИКА* и *БЕЛАРУСЬ* зашифрованы некоторые два натуральных числа, при этом каждая буква обозначает некоторую цифру. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а любые две разные буквы, среди которых нет мягкого знака, обозначают разные цифры. Какую цифру может обозначать мягкий знак, если сумма цифр числа *БЕЛАРУСЬ* равна 26, а число *ПИК* кратно 11?

5. Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = \sqrt{441 + x^2 - 42x \cdot \cos \alpha} + \sqrt{400 + x^2 - 40x \cdot \cos \beta},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – острые углы, такие, что  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .