

**Задание на дистанционное занятие ресурсного центра
по учебному предмету «Математика»**

8 класс

1. Докажите, что из первой сотни натуральных чисел можно выбрать 51 число, среди которых нельзя найти два числа, одно из которых в 2 раза больше второго.

2. На доске были написаны два натуральных числа. Дима подсчитал количество натуральных делителей первого числа. Саша подсчитал количество натуральных делителей второго числа. Коля перемножил два первоначальных числа и подсчитал количество делителей полученного произведения. Результаты, полученные Димой, Сашей и Колей, равны соответственно 99, 100 и 2019. Докажите, что хотя бы один из мальчиков ошибся.

3. Через точку $M(-2; 2)$ проведена прямая, пересекающая координатные оси в точках A и B так, что точка A расположена левее начала координат, а точка B – выше начала координат. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника AOB , где точка O – начало координат?

4. В треугольнике ABC , $\angle B = 90^\circ$, $AC = 2AB$. Биссектриса AL и высота BH пересекаются в точке K . Доказать, что треугольник BKL – равносторонний.

5. По поверхности квадрата бегают 17 муравьев. Доказать, что в любой момент времени найдутся 5 муравьев таких, что наибольшее из всевозможных расстояний между какими-либо двумя из них не превысит половину диагонали исходного квадрата.

6. Числа a , b , c таковы, что верны равенства: $a + ab + b = 5$, $a^2 + a^2b^2 + b^2 = 15$. Найти значение произведения ab , если известно, что это значение единственно.

**Задание на дистанционное занятие ресурсного центра
по учебному предмету «Математика»**

9 класс

1. Укажите какое-нибудь трехзначное число, каждая цифра которого является его простым делителем, и других простых делителей нет.

2. Сколько существует натуральных чисел, удовлетворяющих следующим двум условиям:

- требуемое число имеет 24 делителя, не более трех из которых – простые;
- один из делителей требуемого числа равен 2020?

3. Через точку $A(2019; 0)$ проведена прямая, пересекающая график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2 . Найти значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

4. В трапеции $ABCD$ основание AD в 2 раза длиннее каждой из остальных сторон. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Высота, проведенная из точки B , пересекает диагональ AC в точке K . Окружность, проходящая через точки K, O, B пересекает сторону AB в точке F . Найти отношение $AF:FB$.

5. По поверхности квадрата бегают 145 муравьев. Доказать, что в любой момент времени найдутся 10 муравьев таких, что наибольшее из всевозможных расстояний между какими-либо двумя из них не превысит $\frac{1}{4}$ диагонали исходного квадрата.

6. Положительные числа a, b, c таковы, что выполняются равенства: $a^2 + c^2 = 56$, $b^2 + c^2 = 42$, $ab = c^2$. Чему равно $ac + bc$?

**Задание на дистанционное занятие ресурсного центра
по учебному предмету «Математика»**

10 класс

1. Представьте число 2019 в виде суммы пяти слагаемых, произведение которых кратно числу 10 000 000 000.
2. Сколько существует натуральных чисел, удовлетворяющих следующим двум условиям:
 - требуемое число имеет 48 делителей, из которых не более трех простых;
 - один из делителей требуемого числа равен 2020?
3. Найти функцию $f(x)$ определенную на множестве всех действительных чисел такую, что для любых действительных x и y выполнено равенство: $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2y(x + 1)$.
4. Трапеция ABCD вписана в окружность так, что основание AD равно диаметру, а основание BC – радиусу данной окружности. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Высота, проведенная из точки B, пересекает диагональ AC в точке K. Окружность, описанная около треугольника BOK, пересекает сторону AB в точке F. Найти отношение AF:FB.
5. По поверхности правильного треугольника со стороной 25 см бегает 101 муравей. Доказать, что в любой момент времени найдутся 5 муравьев, которых можно накрыть кругом радиуса 3 см.
6. Пусть a, b, c положительные числа такие, что $a < b < c$. Доказать, что верно неравенство: $\sqrt{a^2 + b^2 + ab} + \sqrt{a^2 + c^2 + ac} > \sqrt{b^2 + c^2 + bc}$.

**Задание на дистанционное занятие ресурсного центра
по учебному предмету «Математика»**

11 класс

1. Нужно вырезать из квадрата 6×6 по линиям сетки попарно различные прямоугольники и квадраты. Какое наибольшее количество прямоугольников можно получить?

2. Сколько существует натуральных чисел, удовлетворяющих следующим двум условиям:

- требуемое число имеет 72 делителя, из которых не более трех простых;
- один из делителей требуемого числа равен 2020?

3. Найти функцию $f(x)$ определенную на множестве всех действительных чисел такую, что для любых действительных x и y выполнено равенство: $f(y + f(x)) = f(x) + 2f(1 - x) + y + 2x$.

4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность так, что основание AD равно диаметру, а основание BC – радиусу данной окружности. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Высота, проведенная из точки B , пересекает диагональ AC в точке K . Доказать, что окружность, описанная около трапеции $ABCD$, и окружность, описанная около треугольника BOK , касаются внутренним образом в точке B .

5. Внутри куба с ребром 24 см летает 109 комаров. Доказать, что в любой момент времени найдутся 5 комаров, которые находятся внутри некоторого шара радиуса 7 см.

6. Пусть a, b, c положительные числа такие, что верны равенства $a^2 + b^2 + ab = 169$, $b^2 + c^2 + bc = 196$, $a^2 + c^2 + ac = 225$. Найти значение выражения: $\frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ac)$.