10 нестандартных олимпиадных задач с решениями

Ниже — подробные решения всех 10 задач с объяснением ключевых идей. В нескольких задачах есть тонкости формулировки, поэтому я отдельно отмечу, где требуется уточнение условия.

Задача 1. Шахматная доска без углов

Условие. Из доски 8×8 удалили два противоположных угловых квадрата. Можно ли покрыть оставшиеся клетки доминошками 1×2?

Решение.

Раскрасим доску в чёрный и белый цвета, как обычную шахматную доску.

- Изначально на доске 32 чёрные и 32 белые клетки.
- Противоположные угловые клетки имеют одинаковый цвет.
- После удаления двух угловых клеток одного цвета останется 30 клеток этого цвета и 32 клетки другого.

Каждая доминошка покрывает ровно две соседние клетки — одну чёрную и одну белую.

Следовательно, любое покрытие доминошками должно содержать одинаковое количество чёрных и белых клеток. Но после удаления углов их количества различаются.

Ответ: покрыть доску невозможно.

Идея: использовать инвариант — величину, которая сохраняется при каждом допустимом действии.

Задача 2. Три коробки и одна правда

Условие. На коробках написано:

- A: «Приз не в коробке B».
- B: «Приз в этой коробке».
- C: «Приз не в этой коробке».

Ровно одна надпись истинна. Где приз?

Решение.

Рассмотрим три возможных положения приза.

1. **Приз в A.**
   - Надпись A истинна: приз действительно не в B.
   - Надпись B ложна.
   - Надпись C истинна: приз действительно не в C.

   Получаем две истинные надписи. Не подходит.

2. **Приз в B.**
   - Надпись A ложна.
   - Надпись B истинна.
   - Надпись C истинна.

   Снова две истинные надписи. Не подходит.

3. **Приз в C.**
   - Надпись A истинна.
   - Надпись B ложна.
   - Надпись C ложна.

   Ровно одна надпись истинна.

Ответ: приз находится в коробке C.

Идея: перебрать все возможные случаи и проверить каждый по условию.

Задача 3. Число с необычным свойством

Условие. Найдите все натуральные n, для которых $n^2 + n + 1$ — точный квадрат.

Решение.

Предположим, что существует натуральное число k, такое что

$$n^2 + n + 1 = k^2.$$

Умножим равенство на 4:

$$4n^2 + 4n + 4 = 4k^2.$$

Заметим, что

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Следовательно,

$$4k^2 = (2n + 1)^2 + 3.$$

Получаем, что квадраты двух целых чисел отличаются на 3:

$$(2k)^2 - (2n + 1)^2 = 3.$$

Но $2k$ — чётное число, а $2n + 1$ — нечётное. Квадрат чётного числа делится на 4, а квадрат нечётного числа при делении на 4 даёт остаток 1.

Поэтому разность этих квадратов при делении на 4 должна давать остаток 3, что само по себе возможно. Используем более сильный аргумент: число $2n + 1$ нечётно, а следующий после него квадрат равен

$$(2n + 3)^2 = (2n + 1)^2 + 8n + 8.$$

При $n \geq 1$ разность между соседними нечётными квадратами больше 3. Значит, число $(2n + 1)^2 + 3$ не может быть квадратом чётного числа.

Получаем противоречие.

Ответ: натуральных решений нет.

Идея: сравнивать соседние квадраты, а не проверять числа по одному.

Задача 4. Монеты и перевороты

Условие. На столе лежат 10 монет орлом вверх. За один ход можно перевернуть ровно 3 монеты. Можно ли получить положение, в котором одна монета лежит орлом вверх, а остальные девять — решкой?

Решение.

Да, можно!

Пронумеруем монеты от 1 до 10.

1. Перевернём монеты 1, 2 и 3.
2. Перевернём монеты 4, 5 и 6.
3. Перевернём монеты 7, 8 и 9.

После первого хода первые три монеты лежат решкой вверх. После второго — ещё три. После третьего — ещё три.

Монета № 10 ни разу не переворачивалась и по-прежнему лежит орлом вверх.

В результате ровно одна монета лежит орлом вверх, а остальные девять — решкой.

Ответ: да, достаточно трёх ходов.

Идея: иногда сложная на вид задача решается непосредственным построением подходящей последовательности действий.

Задача 5. Треугольник с секретом

Условие. В треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и AC, причём $DE \parallel BC$. Площадь треугольника ADE равна 25% площади четырёхугольника $DBCE$. Найдите $AD : AB$.

Решение.

Обозначим площадь малого треугольника через S, а площадь четырёхугольника — через Q.

По условию:

$$S = \frac{1}{4}Q.$$

Тогда $Q = 4S$, а площадь всего треугольника ABC равна

$$S_{ABC} = S + Q = 5S.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5}.$$

Поскольку $DE \parallel BC$, треугольники ADE и ABC подобны. Отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{5}.$$

Извлекаем квадратный корень:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ответ:

$$\boxed{AD : AB = 1 : \sqrt{5}}.$$

Идея: отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения соответствующих сторон.

Задача 6. Рассадка без соседей

Условие. За круглым столом сидят 10 человек. Каждый либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Каждый утверждает: «Оба моих соседа — лжецы». Возможно ли, чтобы среди сидящих был хотя бы один правдивый человек?

Решение.

Да, возможно. Посадим людей поочерёдно:

$$\text{П},\ \text{Л},\ \text{П},\ \text{Л},\ \text{П},\ \text{Л},\ \text{П},\ \text{Л},\ \text{П},\ \text{Л},$$

где П — правдивый человек, а Л — лжец.

Проверим высказывания.

- У каждого правдивого человека оба соседа — лжецы. Поэтому его высказывание истинно.
- У каждого лжеца оба соседа — правдивые люди. Поэтому его высказывание ложно.

Таким образом, все десять человек говорят именно то, что должны говорить в соответствии со своими типами.

Ответ: да, возможно; достаточно чередовать правдивых людей и лжецов.

Идея: проверить условие на конкретной конструкции, а затем убедиться, что она работает для каждого участника.

Задача 7. Вода без мерного стакана

Условие. Есть сосуды вместимостью 8, 5 и 3 литра. В первом находится 8 литров воды, остальные пусты. Как получить ровно 4 литра?

Решение.

Будем записывать состояние сосудов в виде (A, B, C), где A, B, C — объёмы воды в сосудах вместимостью 8, 5 и 3 литра соответственно.

Начальное состояние:

$$(8, 0, 0).$$

Переливаем воду по правилам задачи.

Ход	Действие	Состояние сосудов
0	Начало	$(8, 0, 0)$
1	Из 8 л в 5 л	$(3, 5, 0)$
2	Из 5 л в 3 л	$(3, 2, 3)$
3	Из 3 л в 8 л	$(6, 2, 0)$
4	Из 5 л в 3 л	$(6, 0, 2)$
5	Из 8 л в 5 л	$(1, 5, 2)$
6	Из 5 л в 3 л	$(1, 4, 3)$

На последнем шаге из сосуда на 5 литров переливается только 1 литр, потому что в трёхлитровом сосуде уже находятся 2 литра.

В результате в пятилитровом сосуде остаётся ровно 4 литра.

Ответ: последовательность из шести переливаний приведена в таблице.

Задача 8. Точки на плоскости

Условие. На плоскости выбрали 6 точек с целочисленными координатами. Докажите, что найдутся две точки, у которых разности обеих координат чётны. Найдите минимальное число точек, при котором это гарантировано.

Решение.

Любая целочисленная координата бывает чётной или нечётной.

Поэтому каждая точка относится к одному из четырёх типов:

- $(\text{чётная}, \text{чётная})$;
- $(\text{чётная}, \text{нечётная})$;
- $(\text{нечётная}, \text{чётная})$;
- $(\text{нечётная}, \text{нечётная})$.

Это четыре класса точек.

Если выбрать 5 точек, то по принципу Дирихле как минимум две из них попадут в один класс.

У таких точек обе координаты имеют одинаковую чётность. Следовательно, разности их соответствующих координат чётны.

Таким образом, утверждение верно уже для пяти точек, а значит, тем более верно для шести.

Осталось доказать минимальность. Четырёх точек недостаточно: например, можно выбрать точки

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad (1,1).$$

Все четыре точки относятся к разным классам, поэтому никакие две из них не имеют одновременно чётные разности обеих координат.

Ответ: минимальное число точек — $\boxed{5}$.

Идея: принцип Дирихле — если объектов больше, чем классов, то хотя бы два объекта попадут в один класс.

Задача 9. Часы-перевёртыши

Условие. Электронные часы показывают время в формате ЧЧ:ММ. При повороте экрана на 180° цифры читаются в обратном порядке. Допустимые преобразования цифр заданы так:

$$0 \to 0,\ 1 \to 1,\ 2 \to 2,\ 5 \to 5,\ 6 \leftrightarrow 9,\ 8 \to 8.$$

Нужно найти все времена, которые после поворота также образуют корректное время.

Решение.

Обозначим исходное время как $ab : cd$, где a, b, c, d — цифры.

После поворота получим время

$$f(d)f(c) : f(b)f(a),$$

где f — указанное в условии преобразование цифр.

Чтобы оба показания были корректными, необходимо выполнить несколько условий.

1. Первая цифра исходного часа a должна принадлежать множеству $\{0, 1, 2\}$.
2. Последняя цифра исходных минут d также должна принадлежать $\{0, 1, 2\}$, иначе первая цифра нового часа окажется недопустимой.
3. Цифра b должна принадлежать $\{0, 1, 2, 5\}$, поскольку после преобразования она станет цифрой десятков минут.
4. Если $a = 2$, то b может быть только $0, 1, 2$, чтобы исходный час не превышал 23.
5. Если $d = 2$, то c может быть только $0, 1, 2$, чтобы новый час не превышал 23. Если $d = 0$ или $d = 1$, то c может быть $0, 1, 2, 5$.

Эти условия одновременно гарантируют корректность исходного времени и результата поворота.

Следовательно, **все решения** можно задать следующим образом:

- $a = 0$ или $a = 1$: $b \in \{0, 1, 2, 5\}$;
- $a = 2$: $b \in \{0, 1, 2\}$;
- $d \in \{0, 1, 2\}$;
- при $d = 0$ или $d = 1$: $c \in \{0, 1, 2, 5\}$;
- при $d = 2$: $c \in \{0, 1, 2\}$.

Каждая комбинация цифр, удовлетворяющая этим условиям, даёт подходящее время.

Посчитаем количество таких комбинаций. Для каждого из значений $a = 0$ и $a = 1$ получаем $4 \cdot 11 = 44$ времени, а для $a = 2$ — $3 \cdot 11 = 33$.

Итого:

$$44 + 44 + 33 = \boxed{121}.$$

Ответ: 121 подходящее время, перечисленное компактно через условия на цифры выше.

Идея: преобразовать задачу в ограничения на отдельные цифры, а затем систематически подсчитать допустимые комбинации.

Примечание: решение использует именно соответствие цифр, заданное в условии. Если подразумевается физический семисегментный индикатор, нужно отдельно проверить, как именно выглядит каждая цифра после поворота.

Задача 10. Три выключателя

Условие. За закрытой дверью находятся три лампы накаливания. Снаружи — три выключателя, каждый управляет ровно одной лампой. Все лампы изначально выключены. Можно переключать выключатели сколько угодно, но войти в комнату разрешается только один раз. Как определить соответствие выключателей и ламп, если можно проверять нагрев ламп?

Решение.

Обозначим выключатели A, B и C.

1. Включим выключатель A и оставим его включённым на несколько минут, чтобы соответствующая лампа нагрелась.
2. Выключим A.
3. Включим выключатель B.
4. Выключатель C не трогаем.
5. Войдём в комнату.

Теперь проверим лампы:

- **Лампа горит** — она управляется выключателем B.
- **Лампа не горит, но тёплая** — она управляется выключателем A.
- **Лампа не горит и холодная** — она управляется выключателем C.

Таким образом, все три выключателя однозначно сопоставляются с лампами за один вход в комнату.

Ответ: использовать не только состояние лампы (горит или не горит), но и её температуру.

Идея: получить дополнительную информацию, используя физическое свойство объекта — в данном случае тепловую инерцию лампы.