НЕРАВЕНСТВА (8 КЛАСС)

Немного теории. Алгебраические неравенства доказываются с помощью различных методов, которые основываются на равносильных преобразованиях и свойствах числовых неравенств:

1) если $a - b > 0$, то $a > b$; если $a - b < 0$, то $a < b$;
2) если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$;
3) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
4) если $a < b$ и при этом c – любое число, то $a + c < b + c$;
5) если $a < b$ и при этом $c > 0$, то $ac < bc$, ${}^{a}/_{c} < {}^{b}/_{c}$;
6) если $a < b$ и при этом $c < 0$, то $ac > bc$; ${}^{a}/_{c} > {}^{b}/_{c}$;
7) если $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n$, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < b_1 + b_2 + \ldots + b_n$;
8) если $0 < a_1 < b_1, 0 < a_2 < b_2, \ldots, 0 < a_n < b_n$, то $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$;

Напомним некоторые опорные неравенства, которые часто используются для доказательства других неравенств:

1) $a^2 > 0$;
2) $ax^2 + bx + c > 0$, при $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$;
3) $x + {}^{1}/_{x} \geq 2$, при $x > 0$, и $x + {}^{1}/_{x} \leq -2$, при $x < 0$;
4) $|a + b| \leq |a| + |b|$, $|a - b| \geq |a| - |b|$;
5) если $a > b > 0$, то ${}^{1}/_{a} < {}^{1}/_{b}$;
6) если $a > b > 0$ и $x > 0$, то $a^x > b^x$, в частности, для натурального $n \geq 2$

$$a^2 > b^2 \text{ и } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b};$$

7) если $a > b > 0$ и $x < 0$, то $a^x < b^x$;

- неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел **(неравенство Коши):**

$$\frac{a + b + c + \ldots + z}{n} \geq \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot z};$$

- **неравенство Бернулли:**

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \text{ где } \alpha > -1, n \text{ – натуральное число;}$$

- **неравенство Коши – Буняковского:**

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2);$$

К наиболее «популярным» методам доказательства неравенств можно отнести:

- доказательство неравенств на основе определения;
- метод выделения квадратов;
- метод последовательных оценок;
- метод математической индукции;

- использование специальных и классических неравенств;
- использование элементов математического анализа;
- использование геометрических соображений;
- идея усиления и др.

Задачи с решениями

1. Доказать неравенство:

а) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2 \cdot (a + b + c)$;

б) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$;

в) $x^5 + y^5 - x^4y - x^4y \geq 0$, при $x > 0, y > 0$.

Решение

а) Имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0,$$

что очевидно.

б) Доказываемое неравенство после умножения обеих частей на 2 принимает вид

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b,$$

или $(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b +1) \geq 0$,

или $(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2$, что очевидно. Равенство имеет место лишь при $a = b = 1$.

в) Имеем

$$x^5 + y^5 - x^4y - x^4y = x^5 - x^4y - (x^4y - y^5) = x^4 (x - y) - y^4 (x - y) =$$

$$= (x - y) (x^4 - y^4) = (x - y) (x \sqrt{}- y) (x + y) (x^2 + y^2) = (x - y)^2 (x + y) (x^2 + y^2) \geq 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $x^4 - 7x^2 - 2x +20 > 0$;
2. $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y +1\geq 0$;
3. $x^2 + 4y^2 - 4x + 4y +5 \geq 0$;
4. $a^2 + b^2 - 2ab(a + b) + 2a^2 b^2 \geq 0$;
5. $a^2 + ab + b^2 \geq 0$;
6. $2x^2 - 6x + 13 > 0$;
7. $x^2 + y^2 + xy - x - y +3 > 0$;
8. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 04$
9. $x +y + z \geq \sqrt{xy} +\sqrt{yz} + \sqrt{xz}$;
10. $a^6 + b^6 > a^5 b + ab^5$;
11. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$;
12. $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$;
13. $a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 \geq abc(a + b + c)$;
14. $(1,5)^n \geq 1 + 0,5n$;
15. $0,7^n \geq 1- 0,3n$;