НЕРАВЕНСТВА. 9-11 КЛАСС

Немного теории. Алгебраические неравенства доказываются с помощью различных методов, которые основываются на равносильных преобразованиях и свойствах числовых неравенств:

1) если $a - b > 0$, то $a > b$; если $a - b < 0$, то $a < b$;
2) если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$;
3) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
4) если $a < b$ и при этом c – любое число, то $a + c < b + c$;
5) если $a < b$ и при этом $c > 0$, то $ac < bc$, $a/c < b/c$;
6) если $a < b$ и при этом $c < 0$, то $ac > bc$; $a/c > b/c$;
7) если $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, . . . , $a_n < b_n$, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < b_1 + b_2 + \ldots + b_n$;
8) если $0 < a_1 < b_1$, $0 < a_2 < b_2$, . . . , $0 < a_n < b_n$, то $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$;

Напомним некоторые опорные неравенства, которые часто используются для доказательства других неравенств:

1) $a^2 > 0$;
2) $ax^2 + bx + c > 0$, при $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$;
3) $x + 1/x \geq 2$, при $x > 0$, и $x + 1/x \leq -2$, при $x < 0$;
4) $|a + b| \leq |a| + |b|$, $|a - b| \geq |a| - |b|$;
5) если $a > b > 0$, то $1/a < 1/b$;
6) если $a > b > 0$ и $x > 0$, то $a^x > b^x$, в частности, для натурального $n \geq 2$

$$a^2 > b^2 \text{ и } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b};$$

7) если $a > b > 0$ и $x < 0$, то $a^x < b^x$;

- неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел **(неравенство Коши):**

$$\frac{a + b + c + \ldots + z}{n} \geq \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot z};$$

- **неравенство Бернулли:**

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \text{ где } \alpha > -1, n \text{ – натуральное число;}$$

- **неравенство Коши – Буняковского:**

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2);$$

К наиболее «популярным» методам доказательства неравенств можно отнести:

- доказательство неравенств на основе определения;
- метод выделения квадратов;
- метод последовательных оценок;
- метод математической индукции;
- использование специальных и классических неравенств;
- использование элементов математического анализа;
- использование геометрических соображений;

- идея усиления и др.

Задачи с решениями

1. Доказать неравенство:

а) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2 \cdot (a + b + c)$;

б) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$;

в) $x^5 + y^5 - x^4y - x^4y \geq 0$, при $x > 0$, $y > 0$.

Решение

а) Имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0,$$

что очевидно.

б) Доказываемое неравенство после умножения обеих частей на 2 принимает вид

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b,$$

или $(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b +1) \geq 0$,

или $(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2$, что очевидно. Равенство имеет место лишь при $a = b = 1$.

в) Имеем

$$x^5 + y^5 - x^4y - x^4y = x^5 - x^4y - (x^4y - y^5) = x^4 (x - y) - y^4 (x - y) =$$

$$= (x - y) (x^4 - y^4) = (x - y) (x \sqrt{} - y) (x + y) (x^2 + y^2) = (x - y)^2 (x + y) (x^2 + y^2) \geq 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что если $x > 1$, то $x^4 > 4x - 3$.
2. Даны n натуральных чисел. Из них составили попарные суммы. Среди полученных сумм x оказалось четными и y нечетными. Доказать, что $x + n/2 \geq y$
3. Действительные числа a, b, c таковы, что $a>b>c$ и выполнено равенство $a-b/b-c + b-c /c-a + c-a/a-b = -3$. Докажите, $(b-c)^3 > 4(a-b)^3$
4. Попарно различные положительные числа a, b, c таковы, что выполнено неравенство $a+b/b-c + d+c/c-a + c+a/a-c \leq b-c/a+b + c-a/b+c + a-b/c+a$.

   Докажите, что $a+c/c-b + b+a/a-c + c+b/b-a > 3$

5. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z, t выполняется неравенство $x*y*z*t/(x+y)(z+t) \leq (x+z)^2 (y+t)^2 /4(x+y+z+t)^2$.

Примечание a+b/b-c дробь с числителем a+b и знаменателем b-c