Классические неравенства в задачах

В школьных учебниках по математике в главе «Неравенства» приведены задачи, решение которых позволяет учащимся усвоить свойства неравенств, но не прибавляет им новых знаний, поэтому время, затраченное на решение задач, используется недостаточно эффективно. При изучении неравенств можно углубить знания учащихся, если рассмотреть несколько популярных неравенств, которые можно доказать, опираясь на материал, не выходящий за рамки школьной программы.

В статье приведены классические неравенства Бернулли, Коши, Гюйгенса и Коши–Буняковского, имеющие важное значение как собственно в теории неравенств, так и в своих приложениях в математическом анализе, геометрии и алгебре. Этот материал можно использовать в классах с углубленным изучением математики и при наличии времени на уроках в обычном классе.

I. Неравенство Бернулли

Рассмотрим формулу суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \ (q \neq 1).$$

При $q > 1$ все слагаемые в левой части равенства, начиная со второго, больше 1, поэтому сумма больше n, а при $0 < q < 1$ эта сумма меньше n. Таким образом,

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} > n \text{ при } q > 1,$$

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} < n \text{ при } 0 < q < 1.$$

После умножения этих неравенств на $q - 1$, получим (при $q > 1$) неравенство $q^n - 1 > n(q - 1)$. Откуда

$$q^n > 1 + n(q - 1). \qquad (1)$$

(при $q = 1$ неравенство (1) обращается в равенство).

Из (1) при $q = 1 + x$, $x > -1$, получаем неравенство

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx, \text{ где } x > -1, \qquad (2)$$

называемое неравенством Бернулли (знаменитое семейство швейцарских математиков).

Равенство в (2) достигается при $n = 1$ или при $x = 0$.

Пример 1. Докажите неравенство $2^n \geqslant 1 + n$.

Решение. Достаточно представить $2 = 1 + 1$ и применить (2):

$2^n = (1 + 1)^n \geqslant 1 + n.$

Пример 2. Докажите, что $\sqrt[n]{1 + x} \leqslant 1 + \frac{x}{n}$ $(x \geqslant -1)$.

Решение. Возведем обе части неравенства в степень n:

$$1 + x \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Последнее неравенство справедливо в силу (2) $\left(\text{при } \frac{x}{n} = z\right)$, следовательно, верно и данное неравенство.

Пример 3. Верно ли числовое неравенство

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}\,?$$

Решение. Вынесем $\sqrt[3]{3}$ за скобки и сократим, затем применим неравенство из примера 2 при $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ и $n = 3$. Получим

$$\sqrt[3]{1 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}} < 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3 \cdot 3} + 1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3 \cdot 3} = 2.$$

Данное числовое неравенство верно.

Пример 4. Найдите наименьшее значение функции $y = (1 - x)^n + (1 + x)^n$ на отрезке $[-1; 1]$.

Решение. В силу неравенства Бернулли

$$y \geq 1 + nx + 1 - nx = 2.$$

Равенство достигается при $x = 0$.

Ответ: 2.

Пример 5. Доказать, что если у арифметической прогрессии (a_n) и геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$, то все последующие члены геометрической прогрессии больше соответствующих членов арифметической прогрессии.

Решение. Из условия следует, что $a_1 + d = a_1 q$, где $0 < d$ – разность арифметической прогрессии, а q – знаменатель геометрической прогрессии. Отсюда $q = 1 + \frac{d}{a_1}$. В формуле общего члена геометрической прогрессии применим неравенство (2) $\left(n \geq 2,\ x = \frac{d}{a_1} \neq 0\right)$

$$b_n = a_1 q^{n-1} = a_1\left(1 + \frac{d}{a_1}\right)^{n-1} >$$

$$> a_1\left(1 + \frac{d(n-1)}{a_1}\right) = a_1 + d(n - 1) = a_n.$$

II. Неравенство Коши

Теорема 1. Для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство Коши

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \qquad (3)$$

Равенство в (3) достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказательство. Пусть числа $a_1, a_3, \ldots, a_n$ — положительны. Положим $\varphi_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Это число называется средним геометрическим положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при $n \geqslant 2$ (при $n = 1$ полагаем по определению $\varphi_1 = a_1$).

Очевидно, что имеют место равенства

$$a_n = \frac{\varphi_n^n}{\varphi_{n-1}^{n-1}} = \varphi_{n-1}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right)^n, \ n = 2, 3, \ldots$$

Применим неравенство (1), полагая в нем $q = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$,

$$a_n \geqslant \varphi_{n-1}\left(1 + n\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} - 1\right)\right)^n =$$

$$= n\varphi_n - (n-1)\varphi_{n-1}, \ n \geqslant 2. \quad (4)$$

Отсюда при любом $n = 2, 3, \ldots$ получим неравенства: $a_2 \geqslant 2\varphi_2 - \varphi_1$,

$a_3 \geqslant 3\varphi_3 - 2\varphi_2$,

. . . .

$a_{n-1} \geqslant (n-1)\varphi_{n-1} - (n-2)\varphi_{n-2}$,

$a_n \geqslant n\varphi_n - (n-1)\varphi_{n-1}$.

Складывая эти неравенства почленно, получим

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geqslant n\varphi_n - \varphi_1 = n\varphi_n - a_1.$$

Перенесем a_1 налево, разделим неравенство на n и получим (3).

Равенство в (3) достигается, когда все a_i равны, что следует из неравенства (4). В нем равенство достигается только тогда, когда $a_n = \varphi_n = \varphi_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Отсюда следует $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Заметим, что неравенство (3) справедливо для неотрицательных чисел. Докажите самостоятельно.

Это знаменитое неравенство, принадлежащее французскому математику О. Коши, было опубликовано в 1821 г. Его доказательство занимало несколько страниц сложных выкладок и основано на методе математической индукции. С тех пор появилось несколько десятков различных доказательств этого неравенства.

Рассмотрим несколько примеров применения (3).

Пример 6. Произведение положительных чисел $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Докажите, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n.$$

Утверждение следует из неравенства Коши.

Пример 7. Сумма положительных чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$. Докажите, что при $n \geqslant 2$

1) $\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S - a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$;

2) $\frac{S - a_1}{a_1} + \frac{S - a_2}{a_2} + \ldots + \frac{S - a_n}{a_n} \geqslant n^2 - n$;

3) $\frac{a_1}{S - a_1} + \ldots + \frac{a_n}{S - a_n} + \frac{S - a_1}{a_1} + \ldots + \frac{S - a_n}{a_n} \geqslant$

$$\geqslant \frac{n(n^2 - 2n + 2)}{n-1}.$$

Решение. Каждое слагаемое в 1) представим в виде

$$\frac{a_k}{S - a_k} = \left(\frac{a_k}{S - a_k} + 1\right) - 1 = \frac{S}{S - a_k} - 1, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Сложим n равенств и применим дважды неравенство (3)

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \ldots + \frac{a_n}{S - a_n} = \frac{S}{S - a_1} + \ldots + \frac{S}{S - a_n} - n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{nS}{\sqrt[n]{(S - a_1)\ldots(S - a_n)}} - n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{Sn}{\frac{1}{n}(S - a_1 + \ldots + S - a_n)} - n = \frac{Sn^2}{nS - S} - n = \frac{n}{n-1}.$$

Чтобы доказать 2), дважды применим неравенство (3)

$$\frac{S - a_1}{a_1} + \ldots + \frac{S - a_n}{a_n} = S\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) - n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{Sn}{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}} - n \geqslant \frac{Sn^2}{a_1 + \ldots + a_n} - n = n^2 - n.$$

Наконец, сложив 2) и 1), получим 3).

Пример 8. Найдите наименьшее значение суммы

$$S = \frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \quad (a, b, c > 0).$$

Решение. Достаточно применить (1) для $n = 3$

$$S \geqslant \frac{3}{2}.$$

Значение $\frac{3}{2}$ достигается, когда $a = b = c$ и, следовательно, является наименьшим.

Пример 9. Решите уравнение

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{1 + (x-2)^2} + \frac{2}{2 + (x-2)^2}.$$

Решение. Ясно, что стандартное решение этого уравнения ведет к большим трудностям, поэтому попробуем иначе. Очевидно при $x = 2$ правая часть уравнения равна 2, а при $x = 2$ меньше 2, поскольку каждое слагаемое меньше. Итак, правая часть не превосходит 2. Левую часть представим в виде

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \geqslant 2 \ (x > 1)$$

в силу неравенства Коши для двух чисел, причем равенство достигается при $(x-1)^2 = 1$, т. е. при $x = 2$.

Следовательно, уравнение имеет единственный корень $x = 2$.

Пример 10. При каких значениях x функция

$$f(x) = (1 + 2x)^4(1 - 2x)$$

достигает на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ наибольшего значения?

Решение. Запишем функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{4}(1 + 2x)(1 + 2x)(1 + 2x)(1 + 2x)(4 - 8x).$$

Сумма сомножителей, стоящих в скобках, равна 8, и в силу неравенства Коши для $n = 5$ имеем

$$f(x) \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^5.$$

Следовательно, $f(x)$ достигает наибольшего значения, когда $1 + 2x = 4 - 8x$, т. е. при $x = 0{,}3$.

Пример 11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) \le \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Область определения – промежуток $[0; +\infty)$.

1) $f(0) = 0$ – наименьшее значение, так как $f(x) \geqslant 0$.

2) В силу неравенства Коши ($n = 2$) имеем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}} \leqslant \frac{1}{2},$$

причем равенство достигается при $\sqrt[6]{x} = 1$, то есть $x = 1$. Видим, что $f(1) = \frac{1}{2}$ — наибольшее значение функции.

Пример 12. Какой из равнобедренных треугольников, вписанных в окружность данного радиуса R, имеет наибольшую площадь?

Решение. Обозначив (рис. 1) основание AC равнобедренного $\Delta\ ABC$, вписанного в окружность, через $2x$, дополнение KE высоты BK до диаметра BE через y и площадь $\Delta\ ABC$ через S, находим $S = x(2R - y)$. Отсюда (пропорциональные отрезки в круге)

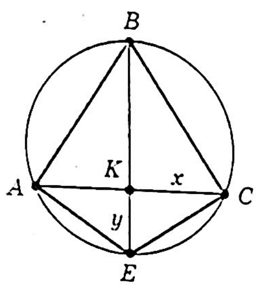

Рис. 1

$$S^2 = x^2(2R - y)^2 = y(2R - y)^3.$$

Очевидно, что S имеет наибольшее значение одновременно с функцией $y(2R - y)^3$. Применим к произведению неравенство (3), записав S^2 в виде

$$S^2 = \frac{1}{3} \cdot 3y(2R - y)(2R - y)(2R - y).$$

Имеем (при $n = 4$ в неравенстве Коши)

$$3S^2 \leqslant \left(\frac{3y + 2R - y + 2R - y + 2R - y}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}R\right)^4.$$

Отсюда S максимально, когда $3y = 2R - y$, т.е. при $y = \frac{R}{2}$. Так как при $y = \frac{R}{2}$ будет $2x = R\sqrt{3}$, то искомый треугольник правильный.

Из примеров видно, как можно применять неравенства Бернулли и Коши при решении задач на отыскание наибольших и наименьших значений функций. В таких задачах обычно применяется аппарат производных, однако в ряде случаев они проще решаются с помощью неравенств Бернулли и Коши.

III. Неравенство Гюйгенса

Покажем, как можно из неравенства Коши получить одно важное неравенство, носящее имя Х. Гюйгенса.

Теорема 2. Для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ верно неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right)^n. \quad (5)$$

Действительно, неравенство вытекает из тождества

$$1 = \frac{1}{n}\left(\frac{1+x_1}{1+x_1} + \frac{1+x_2}{1+x_2} + \ldots + \frac{1+x_n}{1+x_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{1+x_1} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_n}\right).$$

Применяем неравенство (3) к каждому из двух слагаемых в скобках

$$1 \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x_1)\ldots(1+x_n)}} + \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}{\sqrt[n]{(1+x_1)\ldots(1+x_n)}}.$$

Умножим это неравенство на знаменатель, возведем в степень n и получим (5).

Равенство (5) достигается, когда все x_i равны. Это вытекает из условия равенства (3).

Неравенство (5) имеет место и для неотрицательных x_i. Докажите самостоятельно.

Полагая $x_i = \frac{b_i}{a_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), $b_i \geqslant 0$, $a_i > 0$, получим неравенство

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}. \quad (6)$$

Заметим, что равенство в (6) достигается при

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n} = k > 0.$$

Если в неравенстве (6) числа удовлетворяют условию $a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_n$, то

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n) \geqslant 2^n a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Отсюда получаем известное неравенство

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

Отметим еще частный случай неравенства (6). При $n = 2$

$$\sqrt{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2}. \quad (7)$$

Обратимся к примерам.

Пример 13. Доказать, что при любых $a > 0$, $b > 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$a\cos x + b\sin x \le \sqrt{a^2 + b^2},$$

где равенство достигается при $x = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

В самом деле, для любого $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ из (7) имеем

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(\cos^2 x + \sin^2 x)} \geqslant$$

$$\geqslant a\cos x + b\sin x.$$

Это неравенство обращается в равенство при $\frac{b}{a} = \frac{\sin x}{\cos x}$, т.е. при $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$ или $x = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Заметим, что неравенство

$$a\cos x + b\sin x \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

верно при любых a, b и x. Докажите самостоятельно.

Этот пример применяется при решении следующей задачи.

Пример 14. Груз весом P, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту, величина требуемой силы будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

Решение. Проектируя приложенные к грузу силы на горизонтальное направление, из условия их равновесия получаем (рис. 2)

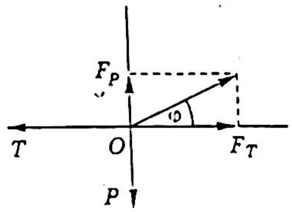

Рис. 2

$$T = F_p k = (P - F\sin\varphi)k = F_\tau = F\cos\varphi,$$

откуда приложенная сила F равна

$$F = \frac{kP}{k\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Так как числитель постоянный, то F примет наименьшее значение, когда знаменатель наибольший. В примере 13 получена формула наибольшего значения (максимума), которая в нашем случае дает $\sqrt{1+k^2}$.

Итак, величина силы, равной $F = \dfrac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$ будет наименьшей при $\varphi = \operatorname{arctg} k$.

Пример 15. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{(a + \operatorname{tg}^2 x)(b + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x},\ a > 0,\ b > 0,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Запишем функцию y в виде, удобном для применения неравенства Гюйгенса (при $n = 2$):

$$a\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{\operatorname{tg}^2 x}\right) \geqslant$$

$$\geqslant a\left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = \sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2.$$

Следовательно, наименьшее значение функции равно $\sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ и достигается при условии $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{a} = \dfrac{b}{\operatorname{tg}^2 x}$, т.е. при $x = \operatorname{arctg} \sqrt[4]{ab}$.

Пример 16 (*задача Гюйгенса*). Пусть a, b – два положительных числа и $b > a$. При каком выборе чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заключенных между a и b, выражение

$$F = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)\ldots(x_n + b)}$$

будет наибольшим?

Решение. F принимает наибольшее значение, когда

$$\frac{1}{F} = a\left(1 + \frac{x_1}{a}\right)\left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)\ldots\left(1 + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\left(1 + \frac{b}{x_n}\right)$$

принимает наименьшее значение. Применяя неравенство Гюйгенса (при $n + 1$ сомножителей), получим

$$\frac{1}{F} \geqslant a\left(1 + \sqrt[n+1]{\frac{x_1}{a}\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{b}{x_n}}\right)^{n+1} = a\left(1 + \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^{n+1}.$$

Ясно, что $\dfrac{1}{F}$ достигает наименьшего значения когда в неравенстве (5) достигается равенство, т. е. при

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{x_1} = \ldots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{b}{x_n}.$$

Следовательно, для величины, обратной F, имеем

$$\frac{1}{F} = a\left(1 + \frac{x_1}{a}\right)^{n+1} = a\left(1 - \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^{n+1}.$$

Отсюда $\dfrac{x_1}{a} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. Значит,

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{x_1} = \ldots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{b}{x_n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Теперь ясно, что F достигает наибольшего значения, когда числа a, x_1, ..., x_n, b образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

При этом

$$\max_{a \le x_i \le b} F = \frac{1}{a(1-q)^{n-1}} = \frac{\left(1 - \sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}\right)^{-n-1}}{a}.$$

IV. Неравенство Коши–Буняковского

Теорема 3. Для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)} \geqslant \geqslant |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \ldots + |a_n b_n|. \quad (8)$$

Действительно, положив в неравенстве (7)

$$a_1 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2, \quad b_1 = a_n^2,$$

$$a_2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2, \quad b_2 = b_n^2,$$

получим, обозначив через

$$M_n = \sqrt{\left(a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_{n-1}^2 + b_n^2\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\left(a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_{n-1}^2\right)} + \sqrt{a_n^2 b_n^2} = M_{n-1} + |a_n b_n|.$$

Получено рекуррентное соотношение

$$M_n \geqslant M_{n-1} + |a_n b_n|.$$

Пользуясь им, последовательно найдем

$$M_n \geqslant M_{n-1} + |a_nb_n| \geqslant M_{n-2} + |a_{n-1}b_{n-1}| + |a_nb_n| \geqslant \ldots \geqslant$$
$$\geqslant M_2 + |a_3b_3| + \ldots + |a_nb_n| \geqslant$$
$$\geqslant |a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_n|.$$

Теорема доказана.

Известны неравенства о модулях, что

$$|a_1b_1| + \ldots + |a_nb_n| \geqslant |a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| \geqslant$$
$$\geqslant a_1b_1 + \ldots + a_nb_n,$$

поэтому из (8) получаем неравенство, называемое неравенством Коши–Буняковского в координатной форме

$$\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)} \geqslant$$
$$\geqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n. \qquad (8')$$

Равенство в (8) достигается при условии (6′), а в (8′) – при

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}. \qquad (6'')$$

Если $a_ib_i > 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то (8) и (8′) совпадают, если среди указанных произведений имеются числа разных знаков, то неравенство (8) дает оценку выражения M_n снизу более точную, чем неравенство (8′). Рассмотрим далее несколько примеров.

Пример 17. Докажите, что если $a + b + c = 1$, $a > -\frac{1}{4}$, $b > -\frac{1}{4}$, $c > -\frac{1}{4}$, то

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant \sqrt{21}.$$

Решение. Из неравенства (8) или (8′) получим

$$1 \cdot \sqrt{4a+1} + 1 \cdot \sqrt{4b+1} + 1 \cdot \sqrt{4c+1} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(1+1+1)(4a+1+4b+1+4c+1)} = \sqrt{21}.$$

Пример 18. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = \sqrt{7} \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Положив в неравенства (8) или (8′) при $n = 3$ $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $b_1 = x^2$, $b_2 = y^2$, $b_3 = z^2$, имеем

$$\sqrt{7} = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(1+1+4)\left(x^4 + y^4 + z^4\right)} = \sqrt{6}.$$

Неравенство $\sqrt{7} \leqslant \sqrt{6}$ неверно, поэтому исходная система уравнений не имеет решений.

Пример 19. Найти экстремумы функции

$$f(x;\, y) = 6\sin x \cos y + 2\sin x \sin y + 3\cos x.$$

Решение. Из неравенства (8′) при $n = 3$ получим

$$f(x;\, y) \leqslant |f(x;\, y)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\left(6^2 + 2^2 + 3^2\right)\left(\sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x\right)} =$$
$$= \sqrt{49\left(\sin^2 x \left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) + \cos^2 x\right)} = 7.$$

Отсюда видно, что $-7 \leqslant f(x;\, y) \leqslant 7$ (при этом оба равенства достигаются, так как соответствующая система двух тригонометрических уравнений, вытекающая при $n = 4$ из (6″)

$$\frac{6}{\sin x \cos y} = \frac{2}{\sin x \sin y} = \frac{3}{\cos x} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \sin y = \frac{2}{3}, \\ \operatorname{tg} y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

всегда разрешима. *Замечание редактора.*

Пример 20. Какой из всех прямоугольных параллелепипедов с данной суммой ребер c имеет наименьшую диагональ?

Решение. Пусть x, y, z – ребра параллелепипеда и $x + y + z = c = \text{const}$, $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$ – квадрат диагонали параллелепипеда. Из неравенства (8′) при $n = 3$

$$c = 1 \cdot z + 1 \cdot y + 1 \cdot z \leqslant \sqrt{(1+1+1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \sqrt{3}\, d.$$

Ясно, что диагональ будет наименьшей, когда в неравенстве достигается равенство, т. е. когда $x = y = z$. Искомым параллелепипедом является куб с диагональю $d = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

Пример 21. Докажите, что для неотрицательных чисел x, y, z выполняется неравенство

$$xy + xz + yz \geqslant \sqrt{3xyz(x+y+z)}.$$

Решение. Напишем тождество

$$(xy + xz + yz)^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2xyz(x + y + z).$$

В силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$(1 \cdot xy + 1 \cdot yz + 1 \cdot xz)^2 \leqslant 3(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2),$$

поэтому оценка из тождества

$$(xy + yz + xz)^2 \geqslant \frac{1}{3}(xy + yz + xz)^2 + 2xyz(x + y + z),$$

откуда немедленно вытекает требуемое неравенство

$$xy + xz + yz \geqslant \sqrt{3xyz(x+y+z)}.$$

Пример 22. Докажите, что для любых действительных чисел a и b выполняется неравенство

$$a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + a + b.$$

Решение. Положим в неравенстве Коши–Буняковского

$$n = 3,\ a_1 = a,\ a_2 = 1,\ a_3 = b,\ b_1 = b,\ b_2 = a,\ b_3 = 1,$$

сразу получим данное неравенство.

Упражнения

Пользуясь неравенством Бернулли, решите задачи 1–6.

Докажите, что при $n \geqslant 2$ имеет место неравенство (1–3).

1. $\sqrt[n]{x} \leqslant 1 + \frac{x-1}{n}$, $x \geqslant 0$.

2. $\sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}} < 2\sqrt[n]{n}$.

3. $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{3}{\sqrt{n}}$.

Имеем

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(1 + \sqrt[n]{n} - 1\right)^n =$$

$$= 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n + \ldots + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n.$$

Отсюда очевидно

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2,$$

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \ (n \geqslant 2);$$

$$\sqrt{\frac{2}{n}} > \sqrt[n]{n} - 1.$$

$$1 > \frac{n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2, \quad \frac{2}{n} > \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2.$$

Итак,

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

Замечание редактора. Таким образом, неравенство можно усилить.

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^n + n - 1}{x}, \ x \geqslant 1.$$

Указание. $x^n = (1 + x - 1)^n$.

Ответ: n.

При положительном a докажите, что при натуральном n справедливо неравенство (5–6).

5. $a^n + \dfrac{n}{a} \geqslant n + 1$.

Указание. Представьте первое слагаемое в виде $a^n = (1 + (a - 1))^n$, примените неравенство Бернулли, а затем – неравенство Коши.

6. $\dfrac{n}{2^n} < 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Указание. $2^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{3}\right)^n$.

7. Докажите теорему 4. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и любых натуральных n и p выполняется неравенство

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^p. \tag{9}$$

Доказательство. Положив в неравенстве (2)

$$q = \left(\frac{x_k}{A}\right)^p, \ A = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

получим

$$\left(\frac{x_k}{A}\right)^p \geqslant 1 + p\left(\frac{x_k}{A} - 1\right) \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Складывая эти неравенства почленно

$$\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{A^p} \geqslant n + p\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{A} - n\right) = n.$$

После умножения неравенства на A^p и деления на n, получим (9). (Теорема 4 – частный случай известного неравенства Гёльдера. Равенство в (9) достигается при $n = 1$, либо при $p = 1$, либо при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. *Замечание редактора.*)

Это неравенство применяется при решении следующих задач.

8. Пусть a, b и c – стороны треугольника. Докажите, что

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2.$$

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x, \ n \in N.$$

Ответ: 2^{1-n}.

Докажите утверждения 10–13.

10. $(x + y)^4 \leqslant 8(x^4 + y^4)$.

11. Если $x + y \geqslant 2$, то $x^4 + y^4 \geqslant 2$.

12. $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12$, если $x + y + z = 6$.

13. Если $x^3 + y^3 + z^3 = 81$, то $x + y + z \leqslant 9$, $x, y, z > 0$.

Следующие задачи решите с помощью неравенства Коши.

14. Число

$$\Gamma_n = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$$

называется *средним гармоническим* положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что среднее гармоническое чисел не превосходит среднего геометрического тех же чисел.

Указание. Замените в неравенстве Коши a_i на $\dfrac{1}{a_i}$.

15. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2, \ a, b, c > 0.$$

Указание. Примените неравенство задачи 14 к каждому из корней, например,

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geqslant \frac{2}{\dfrac{b+c}{a} + 1} = \frac{2a}{a+b+c}.$$

16. Докажите, что если $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$ и все $x_i > 0$, то их произведение будет наибольшим, когда

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{c}{n}.$$

17. Пусть $x_1 x_2 \ldots x_n = c$, где все x_i положительны. Докажите, что сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ принимает наименьшее значение в том случае, когда

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{c}.$$

18. Докажите, что если $x > 0$ и $y > 0$, то

$$(x + 2)(y + 2)(x + y) \geqslant 16xy.$$

19. Докажите неравенство для целых неотрицательных n

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Указание. Неравенство Коши применить к числам 1, 2, ..., n. (Напомним, что по определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $n \geqslant 2$ и $1! = 0! = 1$.)

20. Докажите неравенство при $a, b, c > 0$

$$\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

21. Найдите наибольшее значение произведения xy при условии, что $3x + 2y = 12$.

Ответ: 6.

22. При каких значениях x функция

$$f(x) = (2 + x)^4(1 - x)$$

достигает на отрезке [0; 1] наибольшего значения?

Ответ: $x = 0{,}4$.

Указание. Представить функцию в виде

$$f(x) = \frac{1}{4}(2 + x)(2 + x)(2 + x)(2 + x)(4 - 4x).$$

Решите уравнения 23–25.

23. $\sqrt{1 + 2x} + \sqrt{1 - 2x} + \sqrt[4]{1 - 4x^2} = 3.$

Ответ: $x = 0$.

24. $\left|2\sin\frac{\pi x}{2}\right| = x^2 + \frac{1}{x^2}.$

Ответ: $x = \pm 1$.

25. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

Решение. Предположим, что судно прошло S км за T суток. Тогда расходы R будут равны

$$R = Ta + kTv^3,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Но так как $T = \frac{S}{v}$, то

$$R = \frac{Sa}{v} + kSv^2 = S\left(\frac{a}{2v} + \frac{a}{2v} + kv^2\right) \geqslant 3S\sqrt[3]{\frac{a^2k}{4}}.$$

Из примененного неравенства Коши видно, что минимальные расходы будут в случае, когда $\frac{a}{2v} = kv^2$, т. е. когда скорость $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$.

Задачи на неравенство Гюйгенса:

26. Докажите, что если $0 < x_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) \leqslant \left(1 - \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)^n.$$

Указание. Применить (6) к правой части равенства

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n} =$$

$$= \left(1 + \left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\right)\left(1 + \left(\frac{1}{x_2} - 1\right)\right)\ldots\left(1 + \left(\frac{1}{x_n} - 1\right)\right).$$

27. Докажите, что если $y_1 > x_1 > 0$, $y_2 > x_2 > 0$, то

$$\sqrt{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)} \leqslant \sqrt{y_1y_2} - \sqrt{x_1x_2}.$$

28. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{(a + x)(b + x)}{x},$$

если a, b, x положительные числа.

Ответ: $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

29. Докажите, что для любых чисел a, b, c выполняется неравенство

$$(a^2 + b^2 + 2c^2)(a^2 + c^2 + 2b^2)(b^2 + c^2 + 2a^2) \geqslant 64a^2b^2c^2.$$

Указание. Примените неравенство (6).

30. Докажите неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) \geqslant 9,\ \alpha = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Указание. Примените неравенства Гюйгенса и Коши.

31. Три ребра, выходящие из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, образуют с его диагональю углы α, β, γ. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^2\beta}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^2\gamma}\right) \geqslant 64.$$

Указание. Применить неравенства Гюйгенса, а затем – Коши.

Следующие задачи решаются с помощью неравенства Коши–Буняковского.

32. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 3x + \sqrt{7(1 - x^2)}.$$

Ответ: 4; – 4.

33. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

34. Докажите, что если для действительных чисел a, b выполняется условие $a^2 + b^2 = 1$, то

$$|a + b| \leqslant \sqrt{2}.$$

35. Известно, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $x + y = 4$. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{x}\sin\alpha + \sqrt{y}\cos\alpha$.

Ответ: 2.

36. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

37. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^2 x + 3}.$$

Ответ: 4.