Решение заданий на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмету «Математика»

8 класс. Решения

1. ***Доказательство:***

Например, если выбраны все нечетные числа и число 4, то среди них нельзя найти два числа, одно из которых в два раза больше второго.

Что и требовалось доказать.

2. ***Доказательство:***

Как известно, натуральное число имеет нечетное количество делителей тогда и только тогда, когда является точным квадратом. Пусть на доске были записаны числа a и b. Если никто из мальчиков не ошибся, то числа a, b и ab имеют соответственно 99, 100 и 2019 делителей. Получаем, что числа a и ab являются точными квадратами, а число b – не является. Но при умножении точного квадрата на число, не являющееся точным квадратом, не может получиться точный квадрат. Противоречие. Следовательно, хотя бы один из мальчиков ошибся.

Что и требовалось доказать.

3. ***Решение:***

Пусть прямая пересекает оси OX и OY соответственно в точках A $(a;\ 0)$ и B $(0;\ b)$. Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}AO\cdot OB$. Запишем уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Из условия следует, что $k > 0$. Подставим в это уравнение координаты точки М: $2 = -2k + b$, откуда $b = 2 + 2k$.

Уравнение прямой примет вид $y = kx + 2 + 2k$. Подставим в это уравнение координаты точек A и B.

$0 = ka + 2 + 2k$, откуда $a = -\frac{2k+2}{k} = -2 - \frac{2}{k}$.

$b = k\cdot 0 + 2 + 2k = 2 + 2k$.

В треугольнике AOB катет $AO = |a| = 2 + \frac{2}{k}$, катет $BO = |b| = 2 + 2k$.

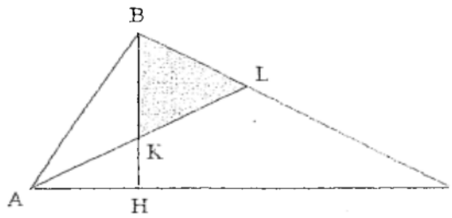
Получаем

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AO\cdot BO = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{k}\right)\cdot(2 + 2k) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\cdot(2 + 2k) = 2 + 2k + \frac{2}{k} + 2 = 4 + 2\cdot\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Согласно известному неравенству Коши: $k + \frac{1}{k} \ge 2$ для положительных k. Поэтому $S_{\Delta AOB} = 4 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right) \ge 4 + 2\cdot 2 = 8$. Минимальное значение площади треугольника AOB равно 8.

***Ответ:* 8 кв. ед.**

4. ***Доказательство:***



Так как AC=2AB, то ∠BCA=30°. Тогда ∠BAC=60°. Так как AL – биссектриса угла A, то ∠KAH=30°. Тогда ∠AKH=60°.

∠BKL=∠AKH=60°. В треугольнике ALC углы LAC и LCA равны по 30°. Тогда ∠ALC=180°–30°–30°=120°, и ∠BLK=180°–120°=60°.

В треугольнике BKL углы BLK и BKL равны по 60°. Следовательно, данный треугольник равносторонний.

Что и требовалось доказать.

5. ***Доказательство:***

Соединим отрезками середины противоположных сторон. В итоге исходный квадрат окажется разбитым на 4 квадратика, со сторонами в 2 раза меньшими сторон исходного квадрата. Заметим, что хотя бы в одном из квадратиков окажется не менее 5 муравьев (границы квадратика считаем «территорией» данного квадратика). В противном случае, общее количество муравьев в исходном квадрате будет не более, чем $4\times 4 = 16$.

Наибольшее из расстояний между муравьями в таком квадратике не превысит диагонали этого квадратика, а это и есть половина диагонали исходного квадрата.

Что и требовалось доказать.

6. ***Решение:***

Перепишем данные равенства в виде $a + b = 5 - ab$, $a^2 + b^2 = 15 - a^2b^2$. Тогда $(a+b)^2 = (5-ab)^2$. $a^2 + 2ab + b^2 = 25 - 10ab + a^2b^2$, $15 - a^2b^2 + 2ab = 25 - 10ab + a^2b^2$.

Тогда имеем: $2a^2b^2 - 12ab + 10 = 0$; $a^2b^2 - 6ab + 5 = 0$; $a^2b^2 - ab - 5ab + 5 = 0$; $ab(ab-1) - 5(ab-1) = 0$; $(ab-1)(ab-5) = 0$. Откуда $ab=1$ или $ab=5$.

Заметим, что если $ab=5$, то $a^2b^2 = 25$ и из второго равенства условия следует, что $a^2 + b^2 = -10$, что невозможно. Итак, $ab=1$.

Ответ: 1.

Решение заданий на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмету «Математика»

9 класс. Решения

1. *Решение:*

Из данного квадрата можно вырезать 8 попарно различных прямоугольников и квадратов следующим образом:

1	1	1	1	1	1
5	5	2	2	2	2
5	5	3	3	3	4
5	5	6	6	7	7
5	5	6	6	8	8
5	5	6	6	8	8

Проведем оценку количества фигур, исходя из того, что фигуры должны быть попарно различными: 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 1×5, 1×6, 2×3. Всего 8 фигур, которые занимают 31 клетку. Больше фигур, удовлетворяющих условиям задачи, вырезать невозможно. На рисунке показано, как вырезать прямоугольники и квадраты 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 2×5, 1×6, 2×3.

2. *Решение:*

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число n имеет следующее разложение на простые множители $n = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – различные простые делители числа n. Тогда количество делителей числа n (обозначается d(n)) выражается формулой $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. Например, $24 = 2^3\cdot3^1$, тогда $d(24) = (3+1)(1+1) = 8$. Действительно, число 24 имеет 8 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Пусть n – натуральное число, имеющее 72 делителя (из которых не более трех простых) и при этом кратное 2020. Заметим, что $2020 = 2^2\cdot5\cdot101$. Тогда требуемое число n имеет ровно три простых делителя (2, 5 и 101) и разложение числа n на простые множители имеет вид: $2020 = 2^a\cdot5^b\cdot101^c$, где $a\geq2$.

Итак, имеем: $(a+1)(b+1)(c+1) = 72$, где $a+1\geq3$. Заметим что $(b+1)(c+1)\geq2\cdot2=4$, тогда $a+1\leq18$. С учетом этих требований рассмотрим различные способы представления числа 72 в виде произведения трех множителей (считаем, что порядок множителей имеет значение). Эти способы сгруппируем по возрастанию значений множителя a+1: 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18.

1) $72 = 3\cdot24 = 3\cdot2\cdot12 = 3\cdot3\cdot8 = 3\cdot4\cdot6 = 3\cdot6\cdot4 = 3\cdot8\cdot3 = 3\cdot12\cdot2$ – получаем 6 способов;
2) $72 = 4\cdot18 = 4\cdot2\cdot9 = 4\cdot3\cdot6 = 4\cdot6\cdot3 = 4\cdot9\cdot2$ – 4 способа;
3) $72 = 6\cdot12 = 6\cdot2\cdot6 = 6\cdot3\cdot4 = 6\cdot4\cdot3 = 6\cdot6\cdot2$ – 4 способа;
4) $72 = 8\cdot9 = 6\cdot3\cdot3$ – 1 способ;
5) $72 = 9\cdot8 = 9\cdot2\cdot4 = 9\cdot4\cdot2$ – 2 способа;
6) $72 = 12\cdot6 = 12\cdot2\cdot3 = 12\cdot3\cdot2$ – 2 способа;
7) $72 = 18\cdot4 = 18\cdot2\cdot2$ – 1 способ.

Всего получаем 6+4+4+1+2+2+1=20 способов. Соответственно получаем 20 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

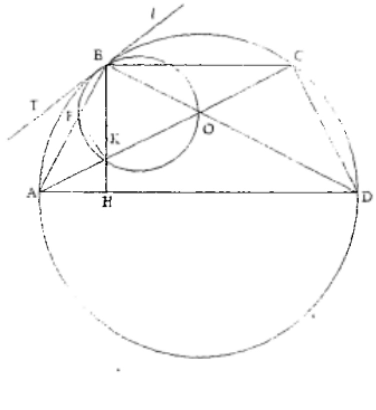
***Ответ*: 20 чисел.**

3. *Решение*

В уравнение $f(y+f(x)) = f(x)+2f(1-x)+y+2x$ подставим вместо y выражение $x-f(x)$. Получаем $f(x-f(x)+f(x)) = f(x)+2f(1-x)+x-f(x)+2x$ (1). $f(x) = 2f(1-x)+3x$ (2). Далее в уравнение (2) вместо x подставим 1–x: $f(1-x) = 2f(1-(1-x))+3(1-x)$. $f(1-x) = 2f(x)+3-3x$ (3). Подставим выражение для $f(1-x)$ из (3) в уравнение (2): $f(x) = 2(2f(x)+3-3x)+3x$; $f(x) = 4f(x)+6-6x+3x$; $f(x) = x-2$. Проверка показывает, что данная функция удовлетворяет исходному уравнению.

***Ответ*: $f(x) = x-2$.**

4. *Доказательство:*



Так как трапеция ABCD вписана в окружность, то AB=CD. Пусть R – радиус окружности. Тогда $BC = R$, $AD = 2R$. Пусть точка P – середина AD и центр описанной окружности. Тогда $PB=PC=BC=R$ и высота BH трапеции равна высоте равностороннего треугольника PBC со стороной R. $BH=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Далее $AH=\frac{AD-BC}{2}=\frac{R}{2}$, $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=R$.

Итак, в трапеции ABCD $AD=2R$, $AB=BC=CD=R$. Так как $AH=\frac{1}{2}AB$, то ∠ABH=30°, ∠BAH=60°, ∠ABC=120°, ∠BAC=∠BCA=30°. Далее, ∠OAD=∠ODA=60°–30°=30°.

Тогда (из треугольника AOD) ∠AOD=120° и ∠AOB=180°–120°=60°.

Для того, чтобы доказать, что окружность, описанная около трапеции ABCD, и окружность, описанная около треугольника BOK, касаются внутренним образом в точке B, докажем, что касательные, проведенные к этим окружностям в точке B, совпадают. Пусть окружность, описанная около треугольника BOK, пересекает отрезок AB второй раз (кроме точки B) в точке F. Пусть TB касательная к окружности, описанной около трапеции ABCD. Тогда ∠TBA=∠TBF=∠BDA=30°.

Четырехугольник FBOK вписанный и ∠KOB=60°, тогда ∠BFK=180°–∠KOB=120°. Далее из треугольника FBK имеем: ∠BKF=180°–∠FBH–∠BFK=180°–30°–120°=30°.

Так как ∠BKF=∠TBF=30°, то прямая TB является также касательной к окружности, описанной около треугольника BOK, откуда и следует утверждение задачи.

Что и требовалось доказать.

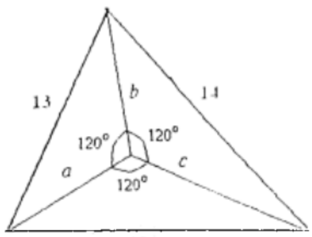
5. ***Доказательство:***

Плоскостями, параллельными граням куба, разобьем куб на 27 одинаковых кубиков с ребром 8 (каждое ребро при это будет разбито на 3 равные части). Тогда найдется хотя бы один кубик, в который попадут не менее 5 комаров (стенки и вершины кубика будем считать частью кубика). В противном случае общее число комаров будет не более $27\cdot 4=108$. Рассмотрим шар, на поверхности которого лежат все вершины этого кубика. Легко видеть, центр этого шара будет находиться в точке пересечения диагоналей кубика и его радиус будет равен половине диагонали кубика с ребром 8, т.е. $\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. Очевидно, что выделенные 5 комаров будут находиться внутри такого шара или на его поверхности (в случае, если комар находится в вершине кубика). Поскольку $4\sqrt{3}<7$ (в чем можно убедиться, возведя обе части неравенства в квадрат), то увеличив радиус данного шара с $4\sqrt{3}$ см до 7 см, получим, что данные 5 комаров будут находиться внутри шара радиуса 7 см.

Что и требовалось доказать.

6. ***Решение***

Перепишем равенства из условия в виде: $a^2+b^2-2ab\left(-\frac{1}{2}\right)=13^2$, $b^2+c^2-2bc\left(-\frac{1}{2}\right)=14^2$, $a^2+c^2-2ac\left(-\frac{1}{2}\right)=15^2$ или $a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120^\circ=13^2$, $b^2+c^2-2bc\cdot\cos 120^\circ=14^2$, $a^2+c^2-2ac\cdot\cos 120^\circ=15^2$. Последние три равенства имеют следующую геометрическую интерпретацию (см. рисунок).



Площадь большого треугольника равна сумме площадей трех меньших треугольников: $\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ+\frac{1}{2}bc\sin 120^\circ+\frac{1}{2}ac\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\sin 120^\circ(ab+bc+ac)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(ab+bc+ac)=\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ac)$. С другой стороны, как несложно подсчитать (например, с помощью формулы Герона), площадь треугольника со сторонами 13, 14, 15 равна 84. Таким образом, $\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ac)=84$.

Ответ: 84.

Решение заданий на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмету «Математика»

10 класс. Решения

1. *Решение:*

2019 = 1000 + 500 + 200 + 300 +19. Произведение чисел 1000, 500, 200, 300 делится на 10 000 000 000.

2. *Решение:*

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число n имеет следующее разложение на простые множител $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *– различные простые делители числа n. Тогда количестве делителей числа n (обозначается d(n)) выражается формулой* $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. *Например* $24 = 2^3 \cdot 3^1$, *тогда* $d(24) = (3+1)(1+1) = 8$. *Действительно, число 24 имеет 8 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8 12, 24.*

Пусть n – натуральное число, имеющее 48 делителей (из которых не более трех простых) и при этом кратное 2020. Заметим, что $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Тогда требуемое число n имеет ровно три простых делител (2, 5 и 101) и разложение числа n на простые множители имеет вид: $2020 = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$, где $a \geq 2$.

Итак, имеем: $(a+1)(b+1)(c+1) = 48$, где $a+1 \geq 3$. Заметим что $(b+1)(c+1) \geq 2 \cdot 2 = 4$, тогд $a+1 \leq 12$. С учетом этих требований рассмотрим различные способы представления числа 48 в вид произведения трех множителей (считаем, что порядок множителей имеет значение). Эти способы сгруппируем по возрастанию значений множителя a+1: 3, 4, 6, 8, 12.

1) $48 = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 2 \cdot 8 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 8 \cdot 2$ – 3 способа;

2) $48 = 4 \cdot 12 = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 6 \cdot 2$ – 4 способа;

3) $48 = 6 \cdot 8 = 4 \cdot 2 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 2$ – 2 способа;

4) $48 = 8 \cdot 6 = 8 \cdot 2 \cdot 3 = 8 \cdot 3 \cdot 2$ – 2 способа;

5) $48 = 12 \cdot 4 = 12 \cdot 2 \cdot 2$ – 1 способ.

Всего получаем 3+4+2+2+1=12 способов. Соответственно получаем 12 чисел, удовлетворяющи условию задачи.

Ответ*: *12 чисел.

3. *Решение:*

В уравнение $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2y(x+1)$ подставим x=y=0.

Получаем $f(0-0) = f(0) + f(0) - 2 \cdot 0 \cdot (0+1)$, откуда $f(0) = 0$.

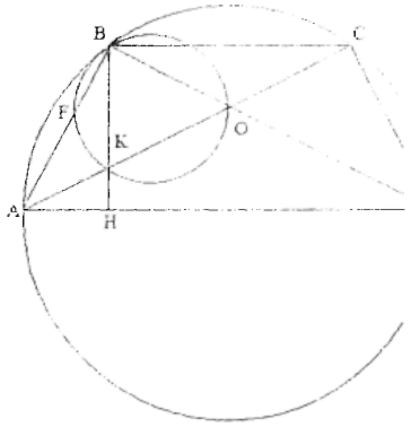
Далее, в уравнение $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2y(x+1)$ подставим x вместо y:

$f(x-x) = f(x) + f(x) - 2x(x+1)$;

$f(0) = f(x) + f(x) - 2x(x+1)$. С учетом того, что $f(0) = 0$, имеем $f(x) = x^2 + x$. Провер показывает, что данная функция удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $f(x) = x^2 + x$.

4. *Решение*:



Так как трапеция ABCD вписана в окружность, то AB=CD. Пусть R – радиус окружности. Тогда $BC = R$, $AD = 2R$. Пусть точка P – середина AD и центр описанной окружности. Тогда PB=PC=BC=R и высота BH трапеции равна высоте равностороннего треугольника PBC со стороной R. $BH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Далее $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{R}{2}$, $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = R$.

Итак, в трапеции ABCD $AD = 2R$, $AB = BC = CD = R$.

Так как $AH = \frac{1}{2}AB$, то ∠ABH=30°, ∠BAH=60°, ∠ABC=120°, ∠BAC=∠BCA=30°. Далее. ∠OAD=∠ODA=60°–30°=30°. Тогда (из треугольника AOD) ∠AOD=120° и ∠AOB=180°–120°=60°. Вписанный ∠ABD=90°, (опирается на диаметр AD), тогда ∠KBO=∠ABD–∠ABH=90°–30°=60°. В треугольнике KOB имеются два угла по 60° (∠KOB и ∠KBO), следовательно, данный треугольник – равносторонний

В равнобедренном треугольнике BOC ∠BOC=120°, поэтому $BO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$. $KO = BO = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

В равнобедренном треугольнике AOD ∠AOD=120°, поэтому $AO = \frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$AK = AO - KO = \frac{2R}{\sqrt{3}} - \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$. По свойству секущих, имеем $AF \cdot AB = AK \cdot AO$, $AF \cdot R = \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}}$, $AF = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}AB$, откуда легко получаем, что AF:FB=2:1.

Ответ: AF:FB=2:1.

5. ***Доказательство***:

Разобьем стороны треугольника на 5 равных отрезков длиной 5 см. Через точки разбиения проведем прямые, параллельные сторонам треугольника. В итоге исходный треугольник окажется разбитым на 25 треугольников со стор. 5 см. Заметим, что в каком-либо треугольнике окажется не менее 5 муравьев. В противном случае, общее количество муравьев в исходном треугольнике муравьев на поле будет не более, чем $4 \times 25 = 100$ муравьев. Опишем около этого треугольника со стороной 5 см круг. Радиус этого круга будем равен $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. $\frac{5\sqrt{3}}{3} < 3$ (в чем легко убедиться, возведя обе части неравенства в квадрат). Очевидно, что указанные 5 муравьев будут находиться внутри такого круга или на его окружности (в случае, если муравей находится в вершине маленького треугольника). Поскольку $\frac{5\sqrt{3}}{3} < 3$ (в чем можно убедиться, возведя обе части неравенства в квадрат), то увеличив радиус данного круга с $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ до 3 см, получим, что данные 5 муравьев будут находиться внутри круга радиуса 3 см.

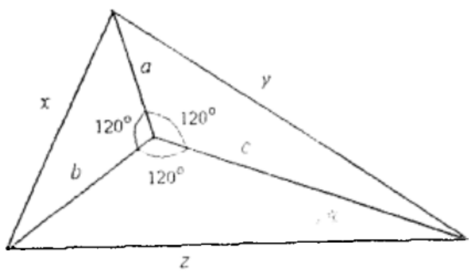
Что и требовалось доказать.

6. ***Доказательство:***

Перепишем неравенство в виде: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\left(-\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\left(-\frac{1}{2}\right)} > \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\left(-\frac{1}{2}\right)}$ и далее $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120^\circ} + \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ} > \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ}$.

Введем обозначения: $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120^\circ}$, $y = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 120^\circ}$, $z = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ}$.

Исходное неравенство имеет следующую геометрическую интерпретацию:



Согласно неравенству треугольника $x + y > z$.

Что и требовалось доказать.

Решение заданий на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмету «Математика»

11 класс. Решения

1. ***Решение:***

Например, число 735 имеет простые делители 7, 3 и 5, и других простых делителей у него нет.

Ответ: 735.

2. ***Решение:***

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число n имеет следующее разложение на простые множители $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *– различные простые делители числа n. Тогда количество делителей числа n (обозначается d(n)) выражается формулой* $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_k + 1)$. *Например,* $24 = 2^3 \cdot 3^1$, *тогда* $d(24) = (3+1)(1+1) = 8$. *Действительно, число 24 имеет 8 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.*

Пусть n – натуральное число, имеющее 24 делителя (из которых не более трех простых) и при этом кратное 2020. Заметим, что $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Тогда требуемое число n имеет ровно три простых делителя (2, 5 и 101) и разложение числа n на простые множители имеет вид: $2020 = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$, где $a \geq 2$.

Итак, имеем: $(a+1)(b+1)(c+1) = 24$, где $a + 1 \geq 3$. Заметим что $(b+1)(c+1) \geq 2 \cdot 2 = 4$, тогда $a + 1 \leq 6$. С учетом этих требований рассмотрим различные способы представления числа 24 в виде произведения трех множителей (считаем, что порядок множителей имеет значение). Эти способы сгруппируем по возрастанию значений множителя a+1: 3, 4, 6.

1) $24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 2$ – 2 способа;

2) $24 = 4 \cdot 6 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$ – 2 способа;

3) $24 = 6 \cdot 4 = 6 \cdot 2 \cdot 2$ – 1 способ.

Всего получаем 2+2+1=5 способов. Соответственно получаем 5 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 5 чисел.

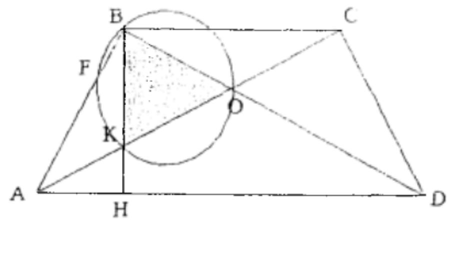
3. ***Решение:***

Запишем уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Подставим в это уравнение координаты точки A: $0 = 2019k + b$, откуда $b = -2019k$. Уравнение прямой примет вид $y = kx - 2019k$. Абсциссы точек пересечения данной прямой с графиком функции $y = x^2$ будут являться корнями уравнения: $x^2 = kx - 2019k$ или $x^2 - kx + 2019k = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k, x_1x_2 = 2019k$.

Имеем: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{k}{2019k} = \frac{1}{2019}$.

Ответ: $\frac{1}{2019}$.

4. ***Решение:***



Пусть $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. BH – высота, проведенная из вершины B. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Так как $AH = \frac{1}{2}AB$, то ∠ABH=30°, ∠BAH=60°, ∠ABC=120°, ∠BAC=∠BCA=30°.

Далее, $\angle OAD=\angle ODA=60°-30°=30°$. Тогда (из треугольника AOD) $\angle AOD=120°$ и $\angle AOB=180°-120°=60°$. В треугольнике BHD: $\angle HBD=90°-\angle ODA=60°$. В треугольнике KOB имеются два угла по 60° ($\angle KOB$ и $\angle KBO$), следовательно, данный треугольник – равносторонний, т.е. BO=KO.

Из равнобедренного треугольника BOC с углом BOC равным 120°, несложно получить, что $BO=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Аналогично, из равнобедренного треугольника AOD с углом AOD равным 120°, несложно получить, что $AO=\frac{AD}{\sqrt{3}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Далее, KO=BO=$\frac{a}{\sqrt{3}}$. AK=AO–KO=$\frac{2a}{\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

По свойству секущих, имеем $AF\cdot AB=AK\cdot AO$, $AF\cdot a=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $AF=\frac{2}{3}a=\frac{2}{3}AB$, откуда легко получаем, что AF:FB=2:1.

Ответ*: *AF:FB=2:1.

5. Доказательство:

Разобьем каждую сторону квадрата на 4 равных отрезка. Через точки разбиения проведем прямые, параллельные сторонам исходного квадрата. В итоге исходный квадрат окажется разбитым на 16 квадратиков, со сторонами в 4 раза меньшими сторон исходного квадрата. Заметим, что хотя бы в одном из квадратиков окажется не менее 10 муравьев (границы квадратика считаем «территорией» данного квадратика). В противном случае, общее количество муравьев в исходном квадрате будет не более, чем $16\times 9=144$.

Наибольшее из расстояний между муравьями в таком квадратике не превысит диагонали этого квадратика, а это и есть $\frac{1}{4}$ диагонали исходного квадрата.

Что и требовалось доказать.

6. Решение:

1-й способ. Подставим выражение для c^2 в первые два равенства. $a^2+ab=56$, $b^2+ba=42$.

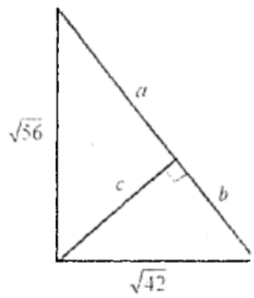
$a(a+b)=56$, $b(b+a)=42$. (1) Разделим соответственно правые и левые части равенств (1):

$\frac{a(a+b)}{b(b+a)}=\frac{56}{42}$, $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$, $a=4k, b=3k, k>0$, тогда $c^2=ab=4k\cdot 3k=12k^2$. $(4k)^2+12k^2=56$, откуда $k=\sqrt{2}$.

Тогда, $a=4\sqrt{2}, b=3\sqrt{2}, c=2\sqrt{6}$. Получаем $ac+bc=4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}+3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}=28\sqrt{3}$.

Ответ: $28\sqrt{3}$.

2-й способ.



Дадим следующую геометрическую интерпретацию равенств из условия задачи. Величину c примем высотой прямоугольного треугольника, величины a и b – проекции катетов на гипотенузу. Тогда равенства из условия задачи могут иметь следующую геометрическую интерпретацию (см. рисунок). Тогда выражение $ac+bc=(a+b)c$ выражает удвоенную площадь прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{56}$ и $\sqrt{42}$, а значит равно произведению катетов, т.е. $\sqrt{56}\cdot\sqrt{42}=28\sqrt{3}$.

Ответ: $28\sqrt{3}$.