

Решение заданий на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмету «Математика»

8 класс.

1. Решение:

Пусть для первой группы выбраны числа x и y ($x < y$). Тогда $xy = 1 + 2 + \dots + 15 - x - y = 120 - x - y$ или $(x+1)(y+1) = 121$. Следовательно, $x+1 = 1$ и $y+1 = 121$ или $x+1 = y+1 = 11$, что невозможно.

Ответ: нельзя.

2. Решение:

Пусть все лампочки оказались включенными после n ходов. Тогда все было произведено $5n$ нажатий кнопки. При этом каждый из 12 выключателей должен быть нажат нечетное число раз. Общее число нажатий будет четным, т.е. n – четное.

Пусть $n=2$. Однако за 2 хода можно включить максимум 10 лампочек.

Пусть $n=4$. Покажем, что за 4 хода можно включить все лампочки.

Ход 1: нажимаем кнопки 1, 2, 3, 4, 5.

Ход 2: нажимаем кнопки 6, 7, 8, 9, 10.

Ход 3: нажимаем кнопки 7, 8, 9, 10, 11.

Ход 4: нажимаем кнопки 7, 8, 9, 10, 12.

Ответ: 4 хода.

3. Решение:

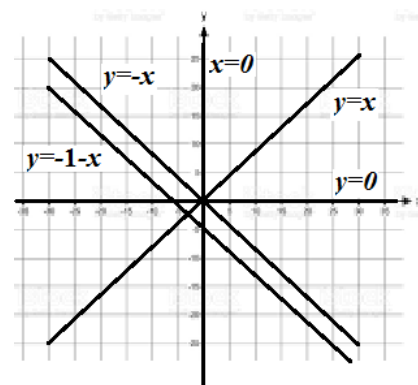
Выполним преобразования: $x^3 y(x+y+1) = xy^3(x+y+1)$;

$$x^3 y(x+y+1) - xy^3(x+y+1) = 0;$$

$$xy(x^2 - y^2)(x+y+1) = 0;$$

$$xy(x-y)(x+y)(x+y+1) = 0.$$

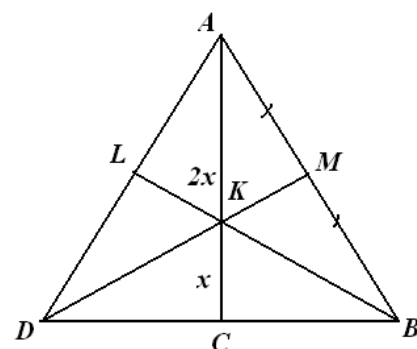
Исходному уравнению будут удовлетворять точки, для координат которых выполняется одно из условий: $x=0, y=0, x-y=0, x+y=0, x+y+1=0$. Это будут точки, лежащие на одной из прямых: $x=0, y=0, y=x, y=-x, y=-1-x$. Несложно построить эти прямые и посчитать, что они делят координатную плоскость на 12 частей.



Ответ: 12 частей.

4. Доказательство:

Отразим треугольник ABC относительно прямой AC . Пусть точка B перейдет в точку D . Получим треугольник ADC , равный треугольнику ABC . Треугольник DAB будет равнобедренным с боковыми сторонами AD и AB и медианой AC . Если $AK=2KC$, то точка K – является точкой пересечения медиан треугольника DAB . Проведем в треугольнике две другие медианы: DM и BL . Так как треугольник DAB равнобедренный, то $DM=BL$. Далее, имеем:



$$KM = \frac{1}{2}DK = \frac{1}{3}DM = \frac{1}{3}BL, \quad KB = \frac{2}{3}BL, \quad \text{откуда } KB=2KM.$$

Что и требовалось доказать.

5. Решение:

А) Покажем, что команда мальчиков школы №1 могла занять последнее десятое место. Пусть эта команда одну игру выиграла, а остальные свела вничью. Тогда она наберет $3+8=11$ очков. Расположим остальные 9 команд по кругу. Пусть каждая команда побеждает следующие 4 команды, находящиеся за ней по ходу часовой стрелки, и проигрывает четырем командам, следующим за ней против хода часовой стрелки. Тогда каждая из

оставшихся 9 команд, даже без учета игр с командой школы №1, 4 раза выиграет и 4 раза проиграет и наберет 12 очков.

Б) Покажем, что команда девочек школы №1 могла занять первое место, набрав при этом больше всех очков. Если команда школы №1 из 9 игр выиграет 4 игры и проиграет 5 игр, то она наберет 12 очков. Если все остальные игры турнира закончатся вничью, то 5 команд, обыгравших команду школы №1, наберут по $3+1\cdot 8=11$ очков, 4 команды, проигравшие команде школы №1, наберут по 8 очков. Таким образом, команда школы №1 занимает первое место.

Ответ: а) 10 место; б) 1 место

**Решение заданий на дистанционное занятие ресурсного центра по
учебному предмету «Математика»
9 класс.**

1. Доказательство:

Перебором остатков при делении на 7 устанавливаем, что числитель только тогда делится на 7, когда $n = 7k + 5$ при некотором целом k . В этом случае $\frac{n^2 - 3n + 4}{49} = \frac{49(k^2 + k) + 14}{49} = \frac{7(k^2 + k) + 2}{7}$. Легко видеть, что последняя дробь не может быть равной целому числу ни при каком k .

Что и требовалось доказать.

2. Решение:

Так как $P(1) = 29$, то коэффициенты многочлена $P(x)$ могут принимать целые значения только от 0 до 29. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \geq 1$; $b, c \geq 0$, $a + b + c = 29$.

Имеем: $2021 = 625a + 25b + c$.

Поскольку $4 \cdot 25^2 > 2021$, то $a \leq 3$.

Если $a=1$ или $a=2$, то $625a \leq 1250$. Тогда $771 \leq 25b + c$. Однако $25 \cdot 28 = 700$. Противоречие.

Значит $a=3$. Итак, $2021 = 625 \cdot 3 + 25b + c$, $146 = 25b + c$, где $b + c = 26$.

Так как $25 \cdot 6 > 146$, то $b \leq 5$. Если $b \leq 4$, то $c \geq 46$. Противоречие.

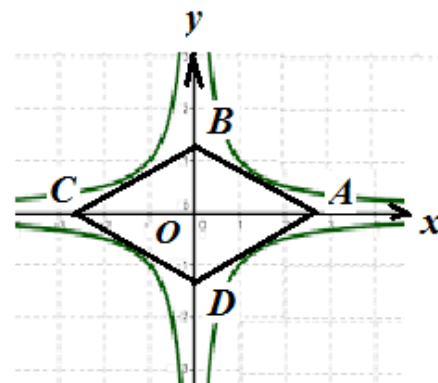
Значит $b=5$. $146 = 25 \cdot 5 + c$, $c=21$.

Итак, $P(x) = 3x^2 + 5x + 21$.

Ответ: $P(x) = 3x^2 + 5x + 21$.

3. Решение:

Пусть вершины A и C лежат на оси OX , а вершины B и D лежат на оси OY . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O – начале координат. Чтобы найти площадь ромба $ABCD$, найдем площадь треугольника AOB и затем умножим ее на 4. Пусть уравнение прямой AB имеет вид: $y = kx + b$. Поскольку эта прямая касается графика функции $y = \frac{1}{x}$ (т.е. имеет с ним одну общую точку), то уравнение $kx + b = \frac{1}{x}$ имеет единственное решение (причем, очевидно, положительное).



Имеем: $kx^2 + bx - 1 = 0$, $D=0$, $b^2 + 4k = 0$. Откуда $k = -\frac{b^2}{4}$.

Уравнение прямой AB примет вид $y = -\frac{b^2}{4}x + b$, где $b \neq 0$. Найдем координаты точек A и B .

Точка A : $y=0$. $0 = -\frac{b^2}{4}x + b$, откуда $x = \frac{4}{b}$, т.е. $A\left(\frac{4}{b}; 0\right)$.

Точка B : $x=0$. $y = -\frac{b^2}{4} \cdot 0 + b$, откуда $y = b$, т.е. $B(0; b)$.

$$\text{Тогда } AO = \frac{4}{b}, BO = b. S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{b} \cdot b = 2.$$

Тогда площадь ромба $ABCD$ $S = 4 \cdot S_{\triangle AOB} = 4 \cdot 2 = 8$ (кв.ед).

Ответ: 8 кв.ед.

4. Доказательство:

По свойству касательной и секущей имеем:

$$AK^2 = AM \cdot AC, CP^2 = CM \cdot CA. \text{ Поскольку } AM = CM, \text{ то } AM \cdot AC = CM \cdot CA, \text{ откуда } AK^2 = CP^2, AK = CP.$$

Что и требовалось доказать.

5. Решение:

Каждая из n команд провела по $n-1$ игре. Рассмотрим случаи четного и нечетного значений n .

1) Пусть n – четно, т.е. $n=2k$, где k – натуральное число. Тогда каждая команда провела по $2k-1$ игре. Если у команды A побед меньше, чем поражений, то наибольшее количество очков, которое может набрать команда A – это $3(k-1)$. Это произойдет, если команда A выиграет $k-1$ игру, проиграет k игр и не сделает ни одной ничьей.

Если у команды B побед больше, чем поражений, то наименьшее число очков, которое она могла набрать – это $3 + 1 \cdot (2k - 2) = 2k + 1$ (это будет в случае, если команда B выиграла одну игру, а остальные свела вничью).

Поскольку команда A набрала очков больше, чем команда B , то должно выполняться неравенство: $3(k-1) > 2k + 1$, откуда $k > 4$. Тогда наименьшее значение n равно $2 \cdot 5 = 10$. Легко видеть, что случай $n=10$ возможен. Если команда A из 9 игр выиграет 4 игры и проиграет 5 игр, то она наберет 12 очков. Если команда B обыграет команду A , но остальные игры сведет вничью, то она наберет $3 + 1 \cdot 8 = 11$ очков.

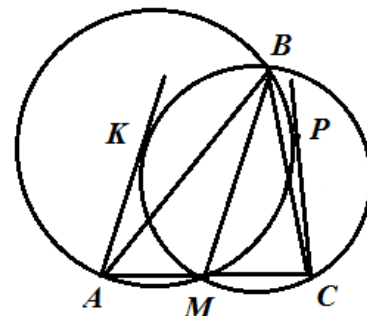
2) Пусть n – нечетно, т.е. $n=2k+1$, где k – натуральное число. Тогда каждая команда провела по $2k$ игр. Если у команды A побед меньше, чем поражений, то наибольшее количество очков, которое может набрать команда A – это $3(k-1) + 1 = 3k - 2$. Это произойдет, если команда A выиграет $k-1$ игру, проиграет k игр и 1 игру сведет вничью.

Если у команды B побед больше, чем поражений, то наименьшее число очков, которое она могла набрать – это $3 + 1 \cdot (2k - 1) = 2k + 2$.

Поскольку команда A набрала очков больше, чем команда B , то должно выполняться неравенство: $3k - 2 > 2k + 2$, откуда $k > 4$. Тогда наименьшее значение n – это $2 \cdot 5 + 1 = 11$.

Поскольку $11 > 10$, то в качестве ответа берем значение n равное 10.

Ответ: 10 команд.



Решение заданий на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмету «Математика»

10 класс.

1. Решение:

Пусть точка $P(a; \frac{1}{a})$ – центр окружности. Тогда уравнение

этой окружности будет иметь вид: $(x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = R^2$.

Так как точка $O(0;0)$ лежит на окружности, то $(0-a)^2 + \left(0 - \frac{1}{a}\right)^2 = R^2$, откуда $a^2 + \frac{1}{a^2} = R^2$.

$$\text{Имеем: } (x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}, \quad x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - \frac{2y}{a} + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$x^2 - 2ax + y^2 - \frac{2y}{a} = 0 \quad (1).$$

Пусть данная окружность пересекает оси OX и OY в точках A и B соответственно. Найдем из (1) координаты точки A : $y=0$, $x^2 - 2ax = 0$. Т.к. $x>0$, то $x=2a$, т.е. $A(2a; 0)$. Найдем координаты точки B : $x=0$, $y^2 - \frac{2y}{a} = 0$. Т.к. $y>0$, то $y = \frac{2}{a}$, т.е. $B(0; \frac{2}{a})$.

$$\text{Итак } OA=2a, OB=\frac{2}{a}. S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = 2 \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: 2 кв. ед.

2. Решение:

Пусть $\frac{10a+b}{10b+c}$ — исходная дробь, где a, b, c — цифры. Тогда $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$, или

$10ab - 10ac = bc - ac$, или $5 \cdot 2a(b-c) = c(b-a)$. Так как $c(b-a)$ делится на простое число 5, то $c \div 5$ или $(b-a) \div 5$.

Если $c \div 5$, то $c = 5$ и $2a(b-5) = b-a$. Из четырех вариантов для b (6, 7, 8, 9) условию задачи соответствуют два: $b_1 = 6, a_1 = 2$ и $b_2 = 9, a_2 = 1$.

Если $(b-a) \div 5$, то $b = a + 5$ и $2a(b-c) = c$. Из четырех вариантов для a (1, 2, 3, 4) условию задачи соответствуют два: $a_1 = 1, b_1 = 6, c_1 = 4$ и $a_2 = 4, b_2 = 9, c_2 = 8$.

Таким образом, Вася мог «сокращать» одну из четырех дробей: $\frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{16}{64}, \frac{49}{98}$.

Ответ: $\frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{16}{64}, \frac{49}{98}$.

3. Решение:

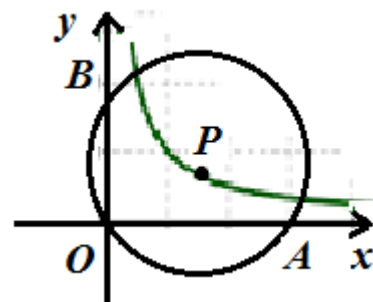
Так как $P(1) = 8$, то коэффициенты многочлена $P(x)$ могут принимать целые значения только от 0 до 8. Поскольку $2021 < 12^4$ и $2021 > 12^3 \cdot 8$, многочлен $P(x)$ имеет степень 3, т.е. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \geq 1, b, c, d \geq 0, a + b + c + d = 8$.

$$\text{Имеем: } 2021 = a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d.$$

$$2021 < 2 \cdot 12^3, \text{ т.е. } a=1.$$

$$2021 = 1728 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d, \quad 293 = b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d, \text{ где } b + c + d = 7.$$

Отсюда следует, что $b \leq 2$.



Пусть $b=1$, тогда $293 = 144 + c \cdot 12 + d$, $149 = c \cdot 12 + d$, где $c + d = 6$. Однако $149 > 12 \cdot 6$. Противоречие.

Пусть $b=2$, тогда $293 = 288 + c \cdot 12 + d$, $5 = c \cdot 12 + d$, где $c + d = 5$. Откуда $c=0$, $d=5$.

Итак, $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$.

Ответ: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$.

4. Решение:

1 способ.

По свойству касательной и секущей имеем:

$AK \cdot AB = AM^2$, $CL \cdot CB = CM^2$. Поскольку $AM = CM$, то

$$AK \cdot AB = CL \cdot CB, \text{ откуда } \frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB} \quad (1).$$

Далее,

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{AK \cdot AM}{AB \cdot AC} = \frac{AK}{2AB}. \quad S(\triangle AKM) = \frac{AK}{2AB} S(\triangle ABC) \quad (2).$$

$$\frac{S(\triangle CLM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{CL \cdot CM}{CB \cdot AC} = \frac{CL}{2BC}. \quad S(\triangle CLM) = \frac{CL}{2BC} S(\triangle ABC) \quad (3)$$

Из (2) и (3) с учетом (1) получаем:

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{BC}{CL} = \frac{AK}{CL} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

2 способ.

Как и в первом способе доказываем, что $\frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB}$.

Далее, $S(\triangle AKM) = \frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A$, $S(\triangle CLM) = \frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C$.

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A}{\frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C} = \frac{AK \cdot \sin A}{CL \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C}.$$

По теореме синусов для треугольника ABC имеем: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{BC}{AB}$.

$$\text{Тогда } \frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot BC}{AB \cdot AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

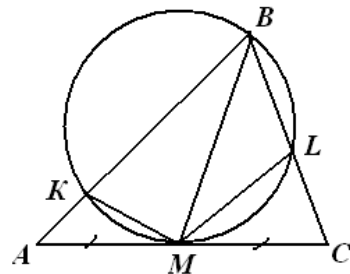
Что и требовалось доказать.

5. Решение:

Команда A провела $n-1$ игру. Если у нее побед больше, чем поражений, то минимальное число очков, которое она могла набрать – это $3 + (n-2) = n+1$ (это будет в случае, если команда A выиграла одну игру, а остальные свела вничью). Каждая из $n-1$ оставшихся команд должна набрать не меньше, чем $n+2$ очка. Поэтому сумма очков, набранных остальными командами должна быть не меньше, чем $(n-1)(n+2) = n^2 + n - 2$. В играх между собой $n-1$ команд могут набрать не более,

чем $\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2}$ очков: они проведут между собой $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ игр, каждая из

которых принесет в общую копилку максимум 3 очка в случае победы одной из команд. Кроме того, оставшиеся $n-1$ команд наберут в сумме $n-2$ очка за счет ничьих с командой A.



Итак, сумма очков, набранная остальными командами не превышает $\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2} + n - 2$.

Получаем неравенство: $\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2} + n - 2 \geq n^2 + n - 2$. Откуда $n \geq 9$.

Пусть $n=9$. Тогда команда A наберет не менее $3+7=10$ очков. Каждая из остальных команд должна набрать не менее 11 очков. Сумма очков остальных команд не меньше, чем

88. В играх между собой остальные 8 команд наберут не более, чем $\frac{3 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 84$ очка. Плюс

еще 7 очков в играх с командой A . Итого, остальные команды могут в сумме набрать максимум $84+7=91$ очко, но при этом они должны набрать не менее 88 очков. Это означает, что им в играх между собой допускается играть вничью не более трех раз. Игры остальных команд между собой будем называть «турнир восьми». В «турнире восьми» будет сыграно

$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ матчей. Рассмотрим возможные количества ничьих на «турнире восьми».

1) На «турнире восьми» не было ничьих. Тогда всего было одержано 28 побед. $28 = 3 \cdot 8 + 4$ – это означает, что не менее четырех команд ($8-4=4$) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. С учетом ничьей с командой A , каждая из этих команд в исходном турнире набрала не более 10 очков.

2) На «турнире восьми» была 1 ничья. Тогда всего было одержано 27 побед. $27 = 3 \cdot 8 + 3$ – это означает, что не менее пяти команд ($8-3=5$) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Ничья прибавит по очку не более, чем двум из них. Тогда не менее, чем $5-2=3$ команды с учетом ничьей с командой A , наберут в исходном турнире не более 10 очков.

3) На «турнире восьми» было 2 ничьи. Тогда всего было одержано 26 побед. $26 = 3 \cdot 8 + 2$ – это означает, что не менее шести команд ($8-2=6$) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Две ничьи прибавят по очку не более, чем четырем из них. Тогда не менее, чем $6-4=2$ команды с учетом ничьей с командой A , наберут в исходном турнире не более 10 очков.

4) На «турнире восьми» было 3 ничьи. Тогда всего было одержано 25 побед. $25 = 3 \cdot 8 + 1$ – это означает, что не менее семи команд ($8-1=7$) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Три ничьи прибавят по очку не более, чем шести из них. Тогда найдется команда, которая с учетом ничьей с командой A , наберет в исходном турнире не более 10 очков.

Получается, что 9 команд на турнире быть не может.

Пусть $n=10$. Тогда команда A наберет не менее $3+8=11$ очков. Покажем, что каждая из остальных команд может набрать более 11 очков. Расположим остальные 9 команд по кругу. Пусть каждая команда побеждает следующие 4 команды, находящиеся за ней по ходу часовой стрелки, и проигрывает четырем командам, следующим за ней против хода часовой стрелки. Тогда «турнире девяти» каждая команда 4 раза выиграет и 4 раза проиграет и наберет 12 очков. В исходном турнире, учитывая игры с командой A , восемь из оставшихся команд наберут по 13 очков, и одна (которая проиграла команде A) наберет 12 очков.

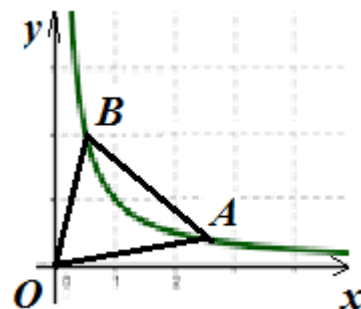
Ответ: 10 команд.

Решение заданий на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмету «Математика»

11 класс.

1. Решение:

Пусть вершины треугольника AOB имеют следующие координаты: $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$, $O(0; 0)$. Выразим квадраты длин сторон треугольника:



$$AO^2 = (a-0)^2 + \left(\frac{1}{a}-0\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$BO^2 = (b-0)^2 + \left(\frac{1}{b}-0\right)^2 = b^2 + \frac{1}{b^2}$$

$$AB^2 = (a-b)^2 + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2.$$

Так как $AO=BO$, то $a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 + \frac{1}{b^2}$, $a^2 - b^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$, $a^2 - b^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}$.

Поскольку $a^2 \neq b^2$ и $a > 0$, $b > 0$, то $ab=1$, $b = \frac{1}{a}$.

$$\text{Тогда } AB^2 = (a-b)^2 + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 = \left(a-\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}-a\right)^2 = 2 \cdot \left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\text{Поскольку } AB=AO, \text{ то } 2 \cdot \left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}, \quad 2a^2 + \frac{2}{a^2} - 4 = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$\text{Откуда } a^2 + \frac{1}{a^2} = 4, \text{ т.е. } AO^2 = 4.$$

$$\text{Площадь треугольника } ABC: s = \frac{AO^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ (кв.ед).}$$

Ответ: $\sqrt{3}$ ед. кв.

2. Доказательство:

$$\text{Обозначим } S(n) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}. \quad \text{Тогда } S(n+1) - S(n) =$$

$$\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} > 0, \text{ т. е. сумма растет с ростом } n. \text{ Остается}$$

$$\text{убедиться, что } S(1) > \frac{5}{9}. \text{ Действительно } S(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{21}{36} > \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Что и требовалось доказать.

3. Решение:

Так как $P(1) = 9$, то коэффициенты многочлена $P(x)$ могут принимать целые значения только от 0 до 9. Поскольку $2021 < 5^5$ и $2021 > 5^3 \cdot 9$, многочлен $P(x)$ имеет степень 4, т.е. $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \geq 1$, $b, c, d, e \geq 0$, $a + b + c + d + e = 9$.

Имеем: $2021 = 625a + 125b + 25c + 5d + e$. Т.к. $625 \cdot 4 = 2500$, то a должно принять значение 1, 2 или 3.

Пусть $a=1$.

$$2021 = 625 + 125b + 25c + 5d + e, \quad 1396 = 125b + 25c + 5d + e, \\ b + c + d + e = 8. \text{ Однако } 125 \cdot 8 \leq 1396. \text{ Противоречие.}$$

Пусть $a=2$.

$$2021 = 1250 + 125b + 25c + 5d + e, \quad 771 = 125b + 25c + 5d + e, \quad \text{где} \\ b + c + d + e = 7.$$

Так как $125 \cdot 7 = 875 > 771$, то $b \leq 6$.

Если $b \leq 4$, то $25c + 5d + e \geq 771 - 500$, т.е. $25c + 5d + e \geq 271$, но $25 \cdot 7 = 175 < 271$.

Если $b = 5$, то $25c + 5d + e = 771 - 625$, т.е. $25c + 5d + e = 146$, где $c + d + e = 2$. Но $25 \cdot 2 = 50 < 146$.

Если $b = 6$, то $25c + 5d + e = 771 - 750$, т.е. $25c + 5d + e = 21$, где $c + d + e = 1$. Легко видеть, что $c=0$. Тогда $5d + e = 21$, где $d + e = 1$. Но $5 \cdot 1 = 5 < 21$.

Таким образом, при $a=2$ получаем противоречие.

Пусть $a=3$.

$$2021 = 1875 + 125b + 25c + 5d + e.$$

$$146 = 125b + 25c + 5d + e, \text{ где } b + c + d + e = 6. \text{ Легко видеть, что } b \leq 1.$$

Пусть $b=0$.

$$\text{Тогда } 146 = 25c + 5d + e, \text{ где } c + d + e = 6, \text{ причем } c \leq 5.$$

$$\text{Если } c \leq 4, \text{ то } 5d + e \geq 146 - 100, \quad 5d + e \geq 46. \text{ Однако, } 5 \cdot 6 < 46.$$

Противоречие.

Если $c = 5$, то $5d + e \geq 146 - 125$, $5d + e = 21$, где $d + e = 1$. Это, очевидно, невозможно.

$$\text{Пусть } b=1. \text{ Тогда } 146 = 125 + 25c + 5d + e.$$

$$21 = 25c + 5d + e, \text{ где } c + d + e = 5.$$

Очевидно, $c=0$, $21 = 5d + e$, откуда $d=4$, $e=1$.

$$\text{Итак, } P(x) = 3x^4 + x^3 + 4x + 1.$$

$$\text{Ответ: } P(x) = 3x^4 + x^3 + 4x + 1.$$

4. Доказательство:

1 способ.

По свойству секущих имеем:

$$AK \cdot AB = AM \cdot AC, \quad CL \cdot CB = CM \cdot CA. \text{ Поскольку } AM=CM,$$

$$\text{то } AK \cdot AB = CL \cdot CB, \text{ откуда } \frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB} \quad (1).$$

$$\text{Далее, } \frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{AK \cdot AM}{AB \cdot AC} = \frac{AK}{2AB}.$$

$$S(\triangle AKM) = \frac{AK}{2AB} S(\triangle ABC) \quad (2).$$

$$\frac{S(\triangle CLM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{CL \cdot CM}{CB \cdot AC} = \frac{CL}{2BC}. \quad S(\triangle CLM) = \frac{CL}{2BC} S(\triangle ABC) \quad (3).$$

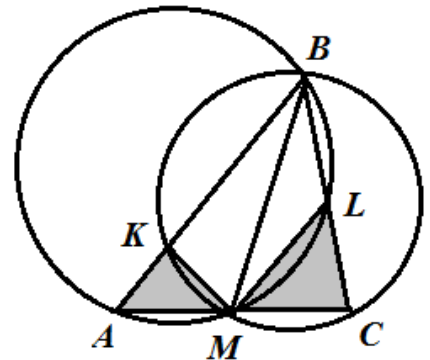
Из (2) и (3) с учетом (1) получаем:

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{BC}{CL} = \frac{AK}{CL} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

2 способ.

$$\text{Как и в первом способе доказываем, что } \frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB}.$$



$$\text{Далее, } S(\triangle AKM) = \frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A, \quad S(\triangle CLM) = \frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C.$$

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A}{\frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C} = \frac{AK \cdot \sin A}{CL \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C}.$$

По теореме синусов для треугольника ABC имеем: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}, \quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{BC}{AB}.$

$$\text{Тогда } \frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot BC}{AB \cdot AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

5. Решение:

Рассмотрим случаи четного и нечетного значений n .

1) Пусть n – четно, т.е. $n=2k$, где k – натуральное число. Тогда каждая команда провела по $2k-1$ игре. Если у команды A побед меньше, чем поражений, то наибольшее количество очков, которое может набрать команда A – это $3(k-1)$. Это произойдет, если команда A выиграет $k-1$ игру, проиграет k игр и не сделает ни одной ничьей.

Докажем, что среди остальных команд всегда найдется команда, которая наберет не меньше, чем $3 + 1 \cdot (2k-2) = 2k+1$ очка (столько очков, например, наберет команда, которая обыграла команду A и остальные игры свела вничью).

Предположим, что каждая из остальных команд набрала не более $2k$ очков. Тогда сумма очков остальных команд должна быть не более чем $2k \cdot (2k-1) = 4k^2 - 2k$. Оценим минимально возможную сумму очков остальных команд. В играх с командой A они набрали $3k$ очков. Между собой остальные $2k-1$ команды проведут $\frac{(2k-1)(2k-2)}{2}$ игры.

В каждой игре разыгрывается 2 (если ничья) или 3 (если победит одна из команд) очка. Поэтому минимально возможная сумма очков остальных команд равна:

$$3k + \frac{(2k-1)(2k-2)}{2} \cdot 2 = 3k + (2k-1)(2k-2) = 4k^2 - 3k + 2. \quad \text{Найдем}$$

разность между максимально и минимально возможными суммами очков остальных команд:

$(4k^2 - 2k) - (4k^2 - 3k + 2) = k - 2$. Это число равно наибольшему количеству игр между остальными $2k-1$ командами, которые могли закончиться победой одной из команд.

Если все игры между остальными $2k-1$ командами закончатся вничью, то k команд, обыгравших команду A наберут в итоге по $3 + 1 \cdot (2k-2) = 2k+1$ очка. Т.к. $2k+1 > 2k$, то каждой из k команд в сумме ее очков необходимо хотя бы одну единичку заменить на нолик, т.е. вместо ничьей записать поражение, т.е. не менее, чем в k играх между остальными командами должна быть зафиксирована победа одной из команд. Однако, как уже установлено максимальное количество побед в играх между ними равно $k-2$. Противоречие. Итак, найдется команда, набравшая не меньше, чем $2k+1$ очко. Поскольку команда A , занявшая 1 место, наберет не более $3(k-1)$ очка, то получаем неравенство: $3(k-1) > 2k+1$, откуда $k > 4$. Тогда наименьшее значение n – это $2 \cdot 5 = 10$. Легко видеть, что случай $n=10$ возможен. Если команда A из 9 игр выиграет 4 игры и проиграет 5 игр, то она наберет 12 очков. Если все остальные игры турнира закончатся вничью, то 5 команд, обыгравших A , наберут по $3+1 \cdot 8=11$ очков, 4 команды, проигравшие A , наберут по 8 очков. Таким образом, команда A занимает первое место.

2) Пусть n – нечетно, т.е. $n=2k+1$, где k – натуральное число. Тогда каждая команда провела по $2k$ игр. Если у команды A побед меньше, чем поражений, то наибольшее

количество очков, которое может набрать команда A – это $3(k-1)+1=3k-2$. Это произойдет, если команда A выиграет $k-1$ игру, проиграет k игр и 1 игру сведет вничью.

Докажем, что среди остальных команд всегда найдется команда, которая наберет не меньше, чем $3+1 \cdot (2k-1) = 2k+2$ очка (столько очков, например, наберет команда, которая обыграла команду A и остальные игры свела вничью).

Предположим, что каждая из остальных команд набрала не более $2k+1$ очков. Тогда сумма очков остальных команд должна быть не более чем $(2k+1) \cdot 2k = 4k^2 + 2k$. Оценим минимально возможную сумму очков остальных команд. В играх с командой A они

набрали $3k+1$ очков. Между собой остальные $2k$ команды проведут $\frac{2k(2k-1)}{2}$ игры. В

каждой игре разыгрывается 2 (если ничья) или 3 (если победит одна из команд) очка. Поэтому минимально возможная сумма очков остальных команд равна:

$3k+1 + \frac{2k(2k-1)}{2} \cdot 2 = 3k+1 + 2k(2k-1) = 4k^2 + k + 1$. Найдем разность между

максимально и минимально возможными суммами очков остальных команд:

$(4k^2 + 2k) - (4k^2 + k + 1) = k - 1$. Это число равно наибольшему количеству игр между остальными $2k$ командами, которые могли закончиться победой одной из команд.

Если все игры между остальными $2k$ командами закончатся вничью, то k команд, обыгравшие команду A наберут в итоге по $3+1 \cdot (2k-1) = 2k+2$ очка. Т.к. $2k+2 > 2k+1$, то каждой из k команд в сумме ее очков необходимо хотя бы одну единичку заменить на нолик, т.е. вместо ничьей записать поражение, т.е. не менее, чем в k играх между остальными командами должна быть зафиксирована победа одной из команд. Однако, как уже установлено максимальное количество побед в играх между ними равно $k-1$. Противоречие. Итак, найдется команда, набравшая не меньше, чем $2k+2$ очков. Поскольку команда A , занявшая 1 место, наберет не более $3(k-1)+1=3k-2$ очка, то получаем неравенство: $3k-2 > 2k+2$, откуда $k > 4$. Тогда наименьшее значение n – это $2 \cdot 5 + 1 = 11$.

Поскольку $11 > 10$, то в качестве ответа берем значение n равное 10.

Ответ: 10 команд.