Решение к заданиям на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмета «Математика»

8 класс

1. *Решение*

Так как равенство верно при всех x, то при $x = -\frac{4}{5}$ получим $0 = \left|-\frac{12}{5} + a\right| + \left|-\frac{4}{5}b + 3\right|$, откуда следует $\left|-\frac{12}{5} + a\right| = 0$ и $\left|-\frac{4}{5}b + 3\right| = 0$. Из двух последних уравнений находим $a = \frac{12}{5}$ и $b = \frac{15}{4}$.

Ответ: $a = \frac{12}{5}, b = \frac{15}{4}$.

2. *Решение*

Заметим, что $2018 = 3 + 5 \cdot 403$. Для победы Джону достаточно первым ходом положить в мешок 3 монеты, а затем каждый раз, когда Билли кладет в мешок n монет, Джон кладет в мешок $5–n$ монет. Таким образом, каждый раз после очередного хода Джона количество монет в мешке увеличивается на 5 по сравнению с количеством монет, которое было в мешке после его предыдущего хода и 2018-ю монету в мешок положит Джон.

Ответ: победит Джон Сильвер.

3. *Решение*

Заметим, что число $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ кратно 8. Поэтому при $m \geq 4$ левая часть уравнения $m! + 8n = 4^m - 2$ кратна 8, а правая не кратна 4, а значит и 8. Поэтому достаточно рассмотреть все натуральные m от 1 до 3.

При m=1 имеем: $1! + 8n = 4^1 - 2$, $8n = 1$, n – не натуральное число.

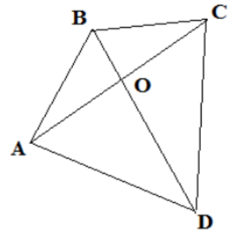
При m=2 имеем: $2! + 8n = 4^2 - 2$, $8n = 12$, n – не натуральное число.

При m=3 имеем: $3! + 8n = 4^3 - 2$, $8n = 56$, n=7.

Ответ: m=3, n=7.

4. *Решение*

Докажем, что сумма диагоналей меньше периметра (**<u>3 балла</u>**).



Применив неравенство треугольника к треугольникам ABC, BCD, CDA и DAB, получим:

$AC < AB + BC$, $BD < BC + CD$, $AC < CD + DA$, $BD < DA + AB$.

Сложим данные неравенства:

$2AC + 2BD < 2AB + 2BC + 2CD + 2DA$, откуда

$AC + BD < AB + BC + CD + DA$.

Докажем, что сумма диагоналей больше полупериметра (**<u>5 баллов</u>**)

Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника ABCD.

Применим неравенство треугольника к треугольникам AOB, BOC, COD, DOA:

$AB < AO + OB$, $BC < BO + OC$, $CD < CO + OD$, $AD < DO + OA$. Сложим полученные неравенства:

$$AB + BC + CD + DA < 2AO + 2BO + 2CO + 2DO$$

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{2} < (AO + CO) + (BO + DO)$$

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{2} < AC + BD$$

Что и требовалось доказать.

5. *Решение*

В каждой клетке проведем диагональ из левого нижнего в правый верхний угол. Каждая клетка разбивается на два равнобедренных прямоугольных треугольника с катетом 1 (за единицу примем длину стороны клетки). Общее число таких треугольников будет четно. Фигурка вида 2 содержит ровно два треугольника. Фигурка вида 1 вне зависимости от ориентации содержит ровно один треугольник, и при этом «перечеркивает» два треугольника. Легко видеть, что после разрезания количество «перечеркнутых» треугольников будет четным, а значит и количество целых треугольников будет четным. Отсюда следует, что количество фигурок первого вида четно.

Что и требовалось доказать.

Решение к заданиям на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмета «Математика»

10 класс

1. ***Решение***

Заметим, что $2018 = 2 + 6 \cdot 336$.

а) Для победы Бывалому достаточно первым ходом положить в мешок 2 монеты, а затем каждый раз, когда Трус и Балбес своими ходами в сумме положат в мешок *n* монет ($2 \le n \le 5$), Бывалый кладет в мешок 6–*n* монет. Таким образом, каждый раз после очередного хода Бывалого количество монет в мешке увеличивается на 6 по сравнению с количеством монет, которое было в мешке после его предыдущего хода и 2018-ю монету в мешок положит Бывалый.

б) Если Бывалый ходит последним, то соперники могут помешать ему выиграть. Для этого первыми своими ходами им надо положить в мешок по 1 монете. Далее каждый раз, когда Бывалый кладет в мешок *n* монет ($1 \le n \le 4$), Трус и Балбес кладут в мешок в сумме 6–*n* монет. Тогда аналогично случаю *а*) 2018-ю монету в мешок положит кто-то из соперников Бывалого.

***Ответ*:** *а*) да; *б*) нет.

2. ***Решение***

Заметим, что при $m \ge 5$ число *m*! заканчивается на 0. Тогда $m \ge 5$ левая часть исходного уравнения заканчивается на 8. Однако легко убедиться, что квадрат натурального числа не может оканчиваться на 8. Поэтому достаточно рассмотреть все натуральные *m* от 1 до 4.

При *m*=1 имеем: $1!+20n + 18 = (2 + n)^2$. Данное уравнение не имеет натуральных корней.

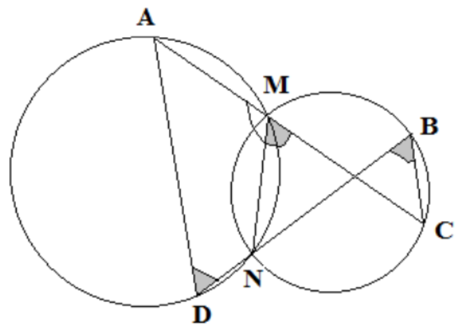
При *m*=2 имеем: $2!+20n + 18 = (4 + n)^2$. Данное уравнение не имеет натуральных корней.

При *m*=3 имеем: $3!+20n + 18 = (6 + n)^2$. Данное уравнение имеет корни 2 и 6.

При *m*=4 имеем: $4!+20n + 18 = (8 + n)^2$. Данное уравнение не имеет действительных корней.

***Ответ*:** (3; 2), (3; 6).

3. ***Решение***



Докажем, что прямые AD и BC параллельны.

Пусть ∠CBN=α. Тогда ∠NMC=∠CBN=α (углы, опирающиеся на одну дугу).

∠AMN=180º–∠NMC=180º–α (смежные углы).

Так как четырехугольник AMND вписанный, то ∠ADN=180º–∠AMN=α.

Итак, ∠CBN=∠ADN=α. Но углы ∠CBN и ∠ADN – внутренние накрест лежащие, при прямых AD и BC и секущей BD. Поэтому прямые BC и AD параллельны. Это означает, что четырехугольник ABCD – трапеция с основаниями AD и BC. Если точки A, B, C и D лежат на одной окружности, то трапеция равнобокая, а значит ее диагонали AC и BD равны.

Что и требовалось доказать.

4. ***Решение***

Заметим, что $a + b = (a + b + c) - c = 8 - c$. Аналогично: $b + c = 8 - a$, $c + a = 8 - b$.

Тогда равенство $(a+b)(b+c)(c+a) = 138$ можно записать в виде $(8-c)(8-a)(8-b) = 138$. Далее, путем несложных тождественных преобразований получаем:

$8^3 - 8^2(a+b+c) + 8(ab+bc+ca) - abc = 138$; $8^3 - 8^2 \cdot 8 + 8(ab+bc+ca) - 14 = 138$;

$ab + bc + ca = 19$.

Далее, $a + b + c = 8$, $(a+b+c)^2 = 64$; $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 64$;

$a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 19 = 64$; $a^2 + b^2 + c^2 = 26$. Тогда $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 26^2$.

$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 676$. (1)

Осталось найти значение выражения $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

$ab+bc+ca=19$; $(ab+bc+ca)^2=361$;

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+a^2bc+abc^2)=361$; $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=361$;

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\cdot 14\cdot 8=361$ $\qquad$ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=137$.

Тогда из (1) получаем $a^4+b^4+c^4=676-2\cdot 137=402$.

***Ответ*:** 402.

5. Решение

а) В каждой клетке проведем диагональ из левого нижнего в правый верхний угол. Каждая клетка разбивается на два равнобедренных прямоугольных треугольника с катетом 1 (за единицу примем длину стороны клетки). Общее число таких треугольников будет четно. Фигурка вида 2 содержит ровно два таких треугольника. Фигурка вида 3 в зависимости от ориентации содержит либо два либо ни одного треугольника – в любом случае, четное количество, и при этом «перечеркивает» либо ни одного, либо четыре треугольника. Фигурка вида 1 вне зависимости от ориентации содержит ровно один треугольник, и при этом перечеркивает два треугольника. Легко видеть, что после разрезания количество «перечеркнутых» треугольников будет четным, а значит и количество целых треугольников будет четным. Отсюда следует, что количество фигурок первого вида четно.

Что и требовалось доказать.

б) Раскрасим доску в черно-белые цвета в шахматном порядке. Фигурки вида 2 покрывают целое количество черных клеток. Каждая фигура первого и третьего вида покрывает ½ черной клетки. Мы уже доказали, что количество фигурок первого вида четно. Значит, фигурки вида 1 покроют целое число черных клеток. Тогда и фигурки вида 3 покроют целое число черных клеток, а значит, их количество четно.

Что и требовалось доказать.

Решение к заданиям дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмета «Математика»

11 класс

1. Решение

Заметим, что $2018 = 2 + 6 \cdot 336$.

а) Для победы Бывалому достаточно первым ходом положить в мешок 2 монеты, а затем каждый раз, когда Трус и Балбес своими ходами в сумме положат в мешок *n* монет ($2 \le n \le 5$), Бывалый кладет в мешок 6–*n* монет. Таким образом, каждый раз после очередного хода Бывалого количество монет в мешке увеличивается на 6 по сравнению с количеством монет, которое было в мешке после его предыдущего хода и 2018-ю монету в мешок положит Бывалый.

б) Если Бывалый ходит последним, то соперники могут помешать ему выиграть. Для этого первыми своими ходами им надо положить в мешок по 1 монете. Далее каждый раз, когда Бывалый кладет в мешок *n* монет ($1 \le n \le 4$), Трус и Балбес кладут в мешок в сумме 6–*n* монет. Тогда аналогично случаю *а*) 2018-ю монету в мешок положит кто-то из соперников Бывалого.

***Ответ*:** *а*) да; *б*) нет.

2. Решение

Если *m*=*n,* то уравнение примет вид $2n! = 2^{2n-1} - 2$. Откуда $n! = 2^{2n-2} - 1$. При всех натуральных *n*>1 правая часть последнего равенства будет нечетной, а левая – четной. При *n*=1 имеем $1! = 2^{2-2} - 1$, что неверно.

Пусть *m*<*n*. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде:

$m!\left(1 + (m+1) \cdot \ldots \cdot n\right) = 2 \cdot \left(2^{n+m-2} - 1\right)$.

При $m \ge 4$ число *m*! кратно 4, однако правая часть последнего равенства не кратна 4. Поэтому достаточно рассмотреть все натуральные *m* от 1 до 3.

При *m*=1 имеем: $1! + n! = 2^n - 2$. $n! = 2^n - 3$. Поскольку $n > m = 1$, то правая часть последнего равенства будет нечетной, а левая – четной. Противоречие.

При *m*=2 имеем: $2! + n! = 2^{n+1} - 2$. $n! = 2^{n+1} - 4$.

$n! = 2^2(2^{n-1} - 1)$. При всех натуральных *n*>3 левая часть последнего равенства будет кратна 8. Однако правая часть не кратна 8. Так как $n > m = 2$, то нужно рассмотреть только случай *n*=3:

$3! = 2^2(2^2 - 1)$, что неверно. $3! = 2^2(2^2 - 1)$, что неверно.

При *m*=3 исходное уравнение примет вид: $3! + n! = 2^{n+2} - 2$, откуда $n! = 2^{n+2} - 8$.

Далее, $n! = 2^3\left(2^{n-1} - 1\right)$. При всех натуральных *n*>5 левая часть последнего равенства будет кратна16. Однако правая часть не кратна 16. Так как $n > m = 3$, то нужно рассмотреть только случай *n*=4 и *n*=5.

При *n*=4 имеем: $4! = 2^3\left(2^3 - 1\right)$, что неверно.

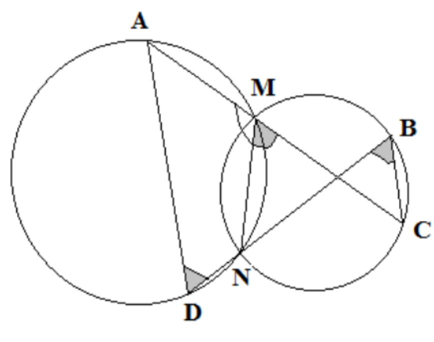
При *n*=5 имеем: $5! = 2^3\left(2^4 - 1\right)$ - это равенство верно.

Итак, пара чисел (3; 5) – одно из решений исходного уравнения.

Рассмотрев случай *m*>*n,* аналогично получим вторую пару решений: (5; 3).

***Ответ*:** (3; 5), (5; 3).

3. Решение



Докажем, что прямые AD и BC параллельны. Пусть ∠CBN=α. Тогда ∠NMC=∠CBN=α (углы, опирающиеся на одну дугу).

∠AMN=180º–∠NMC=180º–α (смежные углы). Так как четырехугольник AMND вписанный, то ∠ADN=180º–∠AMN=α.

Итак, ∠CBN=∠ADN=α. Но углы ∠CBN и ∠ADN – внутренние накрест лежащие, при прямых AD и BC и секущей BD. Поэтому прямые BC и AD параллельны. Это означает, что четырехугольник ABCD – трапеция с основаниями AD и BC.

Если точки A, B, C и D лежат на одной окружности, то трапеция равнобокая, а значит ее диагонали AC и BD равны. И наоборот, если диагонали трапеции равны, то она равнобокая и около нее можно описать окружность.

Что и требовалось доказать.

4. Решение

<u>1 способ.</u>

Заметим, что $a+b=(a+b+c)-c=8-c$. Аналогично: $b+c=8-a$, $c+a=8-b$.

Тогда равенство $(a+b)(b+c)(c+a)=138$ можно записать в виде $(8-c)(8-a)(8-b)=138$.

Далее, путем несложных тождественных преобразований получаем:

$8^3-8^2(a+b+c)+8(ab+bc+ca)-abc=138$; $8^3-8^2\cdot 8+8(ab+bc+ca)-14=138$; $ab+bc+ca=19$.

Далее, $a+b+c=8$, $(a+b+c)^3=8^3$; $(a+b+c)\cdot(a+b+c)^2=512$

$(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right)=512$;

$(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2+2\cdot 19\right)=512$;

$a^3+b^3+c^3+ab^2+a^2b+bc^2+b^2c+ca^2+c^2a+38\cdot(a+b+c)=512$;

$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+38\cdot 8=512$;

$a^3+b^3+c^3+ab(8-c)+bc(8-a)+ca(8-b)=208$;

$a^3+b^3+c^3+8(ab+bc+ca)-3abc=208$;

$a^3+b^3+c^3+8\cdot 19-3\cdot 14=208$;

$a^3+b^3+c^3=98$.

Ответ: 98.

<u>2 способ.</u>

Аналогично способу 1 находим $ab+bc+ca=19$.

Далее, $a+b+c=8$, $(a+b+c)^2=64$; $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=64$;

$a^2+b^2+c^2+2\cdot 19=64$; $a^2+b^2+c^2=26$.

Далее можно использовать известную формулу:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+ab-bc-ac\right)$;

$a^3+b^3+c^3-3\cdot 14=8(26-19)$;

$a^3+b^3+c^3=98$.

Ответ: 98.

5. Решение

а) В каждой клетке проведем диагональ из левого нижнего в правый верхний угол. Каждая клетка разбивается на два равнобедренных прямоугольных треугольника с катетом 1 (за единицу примем длину стороны клетки). Общее число таких треугольников будет четно. Фигурка вида 2 содержит ровно два таких треугольника. Фигурка вида 3 в зависимости от ориентации содержит либо два либо ни одного треугольника – в любом случае, четное количество, и при этом «перечеркивает» либо ни одного, либо четыре треугольника. Фигурка вида 1 вне зависимости от ориентации содержит ровно один треугольник, и при этом перечеркивает два треугольника. Легко видеть, что после разрезания количество «перечеркнутых» треугольников будет четным, а значит и количество целых треугольников будет четным. Отсюда следует, что количество фигурок первого вида четно.

Что и требовалось доказать.

б) Раскрасим доску в черно-белые цвета в шахматном порядке. Фигурки вида 2 покрывают целое количество черных клеток. Каждая фигура первого и третьего вида покрывает ½ черной клетки. Мы уже доказали, что количество фигурок первого вида четно. Значит, фигурки вида 1 покроют целое число черных клеток. Тогда и фигурки вида 3 покроют целое число черных клеток, а значит, их количество четно.

Что и требовалось доказать.

Решение к заданиям на дистанционное занятие ресурсного центра по учебному предмета «Математика»

9 класс

1. Решение

Заметим, что 2+5=3+4=6+1=7. Также заметим, что $2018 = 2 + 7 \cdot 288$. Для победы Джону достаточно первым ходом положить в мешок 2 монеты, а затем каждый раз, когда Билли кладет в мешок *n* монет, Джон кладет в мешок 7–*n* монет. Таким образом, каждый раз после очередного хода Джона количество монет в мешке увеличивается на 7 по сравнению с количеством монет, которое было в мешке после его предыдущего хода и 2018-ю монету в мешок положит Джон.

***Ответ*:** победит Джон Сильвер.

2. Решение

Заметим, что число $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ кратно 4. Поэтому при $m \geq 4$ левая часть уравнения $m!+4n+3=(n-m)^2$ при делении на 4 дает остаток 3. Однако квадрат целого числа, как известно, при делении на 4 может давать остатки 1 либо 0. Поэтому достаточно рассмотреть все натуральные *m* от 1 до 3.

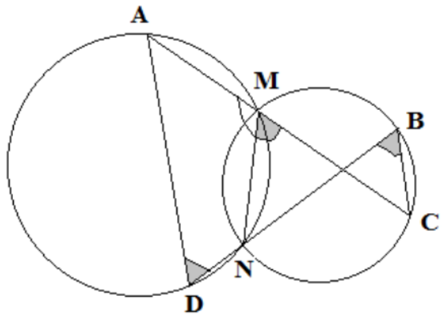
При *m*=1 имеем: $1!+4n+3=(n-1)^2$. Данное уравнение не имеет натуральных корней.

При *m*=2 имеем: $2!+4n+3=(n-2)^2$. Данное уравнение не имеет натуральных корней.

При *m*=3 имеем: $3!+4n+3=(n-3)^2$. Данное уравнение имеет натуральный корень 10.

***Ответ*:** *m*=3*, n*=10.

3. Решение



Пусть ∠CBN=α. Тогда ∠NMC=∠CBN=α (углы, опирающиеся на одну дугу).

∠AMN=180º–∠NMC=180º–α (смежные углы).

Так как четырехугольник AMND вписанный, то∠ADN=180º–∠AMN=α.

Итак, ∠CBN=∠ADN=α. Но углы ∠CBN и ∠ADN – внутренние накрест лежащие, при прямых AD и BC и секущей BD. Поэтому прямые BC и AD параллельны.

Что и требовалось доказать.

4. Решение

В каждой клетке проведем диагональ из левого нижнего в правый верхний угол. Каждая клетка разбивается на два равнобедренных прямоугольных треугольника с катетом 1 (за единицу примем длину стороны клетки). Общее число таких треугольников будет четно. Фигурка вида 2 содержит ровно два таких треугольника. Фигурка вида 3 в зависимости от ориентации содержит либо два либо ни одного треугольника – в любом случае, четное количество, и при этом «перечеркивает» либо ни одного, либо четыре треугольника. Фигурка вида 1 вне зависимости от ориентации содержит ровно один треугольник, и при этом перечеркивает два треугольника. Легко видеть, что после разрезания количество «перечеркнутых» треугольников будет четным, а значит и количество целых треугольников будет четным. Отсюда следует, что количество фигурок первого вида четно.

Что и требовалось доказать.