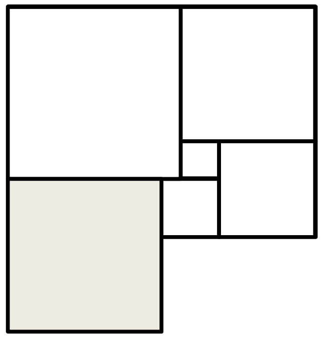
7 КЛАСС

7.1. Найдите наибольшее отношение трехзначного числа к сумме его цифр.

7.2. За два года завод снизил выпуск продукции на 51 %. При этом каждый год объем выпускаемой продукции снижался на одно и то же количество процентов. На сколько?

7.3. У некоторого четырехугольника измерили длины четырех сторон и одной диагонали. Получили значения 10 см, 20 см, 28 см, 50 см, 75 см. Какой результат получили при измерении диагонали?



7.4. Фигура на рисунке составлена из шести квадратов. У самого маленького сторона равна 1. Найдите сторону левого нижнего квадрата.

7.5. У Веры есть несколько конфет не обязательно одинаковой стоимости. Известно, что конфеты можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет вдвое больше, чем в другой. Также их можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет втрое больше, чем в другой. Какое наименьшее число конфет могло быть у Веры?

8 КЛАСС

8.1. У числа *А* подсчитали сумму цифр и получили число *Б*. У числа *Б* подсчитали сумму цифр и получили число *В*. Когда подсчитали сумму цифр у числа *В*, то и получили число 2. Числа *А*, *Б*, *В* и 2 все различны. Найдите наименьшее возможное число *А*.

8.2. Число $\frac{1}{42}$ записали бесконечной десятичной дробью. Затем стёрли 2021-ю цифру после запятой. Выясните, полученная бесконечная десятичная дробь больше или меньше числа $\frac{1}{42}$.

8.3. На плоскости отметили пять точек: *A*, *B*, *C*, *D*, *O*. Оказалось, что углы *AOB*, *BOC*, *COD* равны между собой, а угол *AOD* втрое меньше каждого из них (все углы меньше развернутого). Какой может быть величина угла *AOD*? Постарайтесь перечислить все возможные варианты.

8.4. Найдите наименьшее число, которое начинается с 2021 и делится без остатка на все однозначные числа.

8.5. На плоскости отмечено 4 точки. Докажите, что их можно распределить в две группы, которые друг от друга нельзя отделить никакой прямой.

9 КЛАСС

9.1. Числа от 1 до 2021 распределяют в несколько групп так, чтобы в одной группе не оказалось двух чисел, из которых одно вдвое больше другого. Какое наибольшее количество чисел может оказаться в одной группе?

9.2. Корнем квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются числа $\frac{c-a-b}{2a}$ и $\frac{a-b-c}{2a}$. Докажите, что один из корней этого трехчлена по модулю равен 1.

9.3. В треугольнике ABC две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Найдите углы этого треугольника.

9.4. Докажите, что если число $m^2 + 9mn + n^2$ при целых m и n делится на 11, то на 11 делится и число $m^2 - n^2$.

9.5. Футбольный мяч сшит из белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый шестиугольник сшит по трем своим сторонам с тремя белыми и тремя черными многоугольниками, а каждый пятиугольник — с пятью белыми многоугольниками. Всего использовано 32 многоугольника. Сколько среди них черных?

7 КЛАСС

7.1. Найдите наибольшее отношение трехзначного числа к сумме его цифр.

Решение. Имеем: $\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c} = \dfrac{100\,(a+b+c)-90b-99c}{a+b+c} = 100 - \dfrac{90b+99c}{a+b+c}$. Наибольшее значение последнее выражение принимает при $b = c = 0$.

Ответ. 100.

7.2. За два года завод снизил выпуск продукции на 51 %. При этом каждый год объем выпускаемой продукции снижался на одно и то же количество процентов. На сколько?

Решение. Пусть два года назад завод выпускал a единиц продукции, а ежегодное снижение выпуска составляло x %. Тогда после первого года снижения завод выпускал $a - a\cdot\dfrac{x}{100}$, т. е. $a\cdot\left(1-\dfrac{x}{100}\right) = b$ единиц, а после второго года — выпускал $b\cdot\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$, т. е. $a\cdot\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^2$ единиц. Так как по условию двухгодичное снижение составило 51 %, то после второго года завод выпустил $a - a\cdot\dfrac{51}{100}$, т. е. $a\cdot\dfrac{49}{100}$ единиц. Поэтому $a\cdot\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^2 = a\cdot\dfrac{49}{100}$. Получаем: $\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^2 = \dfrac{49}{100}$, $1-\dfrac{x}{100} = \dfrac{7}{10}$, $\dfrac{x}{100} = \dfrac{3}{10}$ и $x = 30$.

Ответ. 30 %.

7.3. У некоторого четырехугольника измерили длины четырех сторон и одной диагонали. Получили значения 10 см, 20 см, 28 см, 50 см, 75 см. Какой результат получили при измерении диагонали?

Решение. После проведения диагонали в четырехугольнике получается два треугольника. В треугольнике длина большей стороны меньше суммы длин двух других сторон. Поэтому в треугольнике со стороной 75 см две другие стороны имеют длины 50 см и 28 см. Из трех значений 75 см, 50 см, 28 см одно, то, которое является длиной диагонали, должно быть длиной стороны другого треугольника и быть меньше суммы 10 см + 20 см. Таким является значение 28 см.

Ответ. 28 см.

7.4. Фигура на рисунке составлена из шести квадратов. У самого маленького сторона равна 1. Найдите сторону левого нижнего квадрата.

Решение. Пусть a — сторона среднего квадрата снизу. Тогда $a + 1$ — сторона правого квадрата снизу, $a + 2$ — сторона правого квадрата сверху, $a + 3$ — сторона левого квадрата сверху и $(a + 3) - (a - 1)$, т. е. 4 — сторона левого квадрата снизу.

Ответ. 4.

7.5. У Веры есть несколько конфет не обязательно одинаковой стоимости. Известно, что конфеты можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет вдвое больше, чем в другой. Также их можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет втрое больше, чем в другой. Какое наименьшее число конфет могло быть у Веры?

Ответ. 3. Например, 8 коп, 3 коп и 1 коп.

8 КЛАСС

8.1. У числа *А* подсчитали сумму цифр и получили число *Б*. У числа *Б* подсчитали сумму цифр и получили число *В*. Когда подсчитали сумму цифр у числа *В*, то и получили число 2. Числа *А*, *Б*, *В* и 2 все различны. Найдите наименьшее возможное число *А*.

Решение. Наименьшее число B, не равное 2, — это число 11. Тогда нименьшим из чисел Б является число 29, а наименьшим из чисел А — число 2999.

Ответ. 2999.

8.2. Число $\frac{1}{42}$ записали бесконечной десятичной дробью. Затем стёрли 2021-ю цифру после запятой. Выясните, полученная бесконечная десятичная дробь больше или меньше числа $\frac{1}{42}$.

Решение. Делением находим, что $\frac{1}{42} = 0,0(238095)$. Так как $2021 - 1 - 6 \cdot 336 = 4$, то стёрли 4-ую цифру в периоде, т. е цифру 0. Поэтому полученная бесконечная десятичная дробь больше исходной.

Ответ. больше.

8.3. На плоскости отметили пять точек: A, B, C, D, O. Оказалось, что углы AOB, BOC, COD равны между собой, а угол AOD втрое меньше каждого из них (все углы меньше развернутого). Какой может быть величина угла AOD? Постарайтесь перечислить все возможные варианты.

Решение. Если точки A, O, B отмечены на одной прямой, то при указанных условиях все углы имеют величину 0°.

Пусть теперь точки A, O, B не лежат на одной прямой и величина угла AOD равна x. Тогда величина каждого из углов AOB, BOC, COD равна $3x$. Указанные в задаче условия реализуются только тогда, когда сумма трех одинаковых углов отличается от полного угла на угол AOD.

Если $3 \cdot 3x = 360 - x$, то $x = 45$. А если $3 \cdot 3x = 360 + x$, то $x = 36$.

Ответ. 0°, 45°, 36°.

8.4. Найдите наименьшее число, которое начинается с 2021 и делится без остатка на все однозначные числа.

Решение. Наименьшее из чисел, которые делятся без остатка на все однозначные числа — это число 2520. Поэтому искомое число должно оканчиваться цифрой 0, А число десятков в этом числе должно делиться на 252. Находим, что $2021 = 252 \cdot 8 + 5$, и $202104 = 252 \cdot 802$. Это число наименьшее, поскольку504 — наименьшее число, которое начинается с цифры 5 и делится на 252 без остатка. Поэтому искомое число — 2021040

Ответ. 2021040.

8.5. На плоскости отмечено 4 точки. Докажите, что их можно распределить в две группы, которые друг от друга нельзя отделить никакой прямой.

Решение. Если отмеченные точки — вершины выпуклого четырехугольника, то в каждую группу включим две диагональные точки. Если же отмеченные точки — вершины невыпуклого четырехугольника, то одну группу образуем из одной точки, которая лежит либо между какими-то двумя, либо внутри треугольника с вершинами в остальных точках

9 КЛАСС

9.1. Числа от 1 до 2021 распределяют в несколько групп так, чтобы в одной группе не оказалось двух чисел, из которых одно вдвое больше другого. Какое наибольшее количество чисел может оказаться в одной группе?

Решение. В одну группу поместим все нечетные числа (их 1011), все числа, кратные 4 и не кратные 8 (их 505 – 252), все числа, кратные 16 и не кратные 32 (их 126 – 63), все числа, кратные 64 и не кратные 128 (их 31 – 15), все числа, кратные 256 и не кратные 512 (их 7 – 3) и все числа, кратные 1024 (такое число одно). Все остальные числа поместим во вторую группу. В первой группе будет всего 1011 + 253 + 63 + 16 + 4 + 1 чисел, т. е. 1348 чисел. Больне чисел в одну группу поместить нельзя.

Ответ. 1348.

9.2. Корнем квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются числа $\frac{c-a-b}{2a}$ и $\frac{a-b-c}{2a}$. Докажите, что один из корней этого трехчлена по модулю равен 1.

Решение. По теореме Виета $\frac{c-a-b}{2a} \cdot \frac{a-b-c}{2a} = \frac{c}{a}$, т. е. $(-b)^2 - (a-c)^2 = 4ac$, т. е. $b^2 = (a+c)^2 = 0$. Если $b = a + c$, то $\frac{c-a-b}{2a} = \frac{c-a-(a+c)}{2a} = -1$. Если же $-b = a + c$, то $\frac{a-b-c}{2a} = \frac{a+(a+c)-c}{2a} = 1$.

9.3. В треугольнике ABC две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Найдите углы этого треугольника.

Решение. Пусть из вершины A проведена высота длиной h_a к стороне длиной a, а из вершины B проведена высота длиной h_b к стороне длиной b. По условию h_a □ a, h_b □ b. А поскольку отрезок перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой, является кратчайшим из всех отрезков, соединяющих данную точку с этой прямой, то h_a □ b, h_b □ a. Тогда ah_a □ ab, bh_b □ ab и, учитывая условие, bh_a □ ab, ah_b □ ab. Значит, bh_a □ ab □ ah_a, ah_b □ ab □ bh_b, b □ a, a □ b и $a = b$. Теперь условие можно записать так: h_a □ b, h_b □ a. Это возможно только тогда, когда $h_a = b = a = h_b$, т. е. когда стороны AC и BC равны и сами являются высотами. Значит, треугольник ABC является равнобедренным и прямоугольным.

Ответ. 90 º, 45 º, 45º.

9.4. Докажите, что если число $m^2 + 9mn + n^2$ при целых m и n делится на 11, то на 11 делится и число $m^2 - n^2$.

Решение. Если на 11 делится число $m^2 + 9mn + n^2$, то делится и число $m^2 + 9mn + n^2 - 11mn$, т. е число $(m - n)^2$, а, значит, и число $m - n$. Но в этом случае на 11 делится и произведение $(m - n)(m + n)$, т. е. число $m^2 - n^2$.

9.5. Футбольный мяч сшит из белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый шестиугольник сшит по трем своим сторонам с тремя белыми и тремя черными многоугольниками, а каждый пятиугольник — с пятью белыми многоугольниками. Всего использовано 32 многоугольника. Сколько среди них черных?

Решение. Пусть использовано x черных многоугольников и y белых. Чтобы из одного черного многоугольника перейти в соседний белый есть 5 возможностей, а всего таких переходов — $5x$. Чтобы из одного белого многоугольника перейти в соседний черный есть 3 возможности, а всего таких переходов — $3y$. Но $5x = 3y$. Значит $y = \frac{5}{3}x$ и, учитывая, что $x + y = 32$, получаем, что $x + \frac{5}{3}x = 32$, откуда $x = 12$.

Ответ. 12.